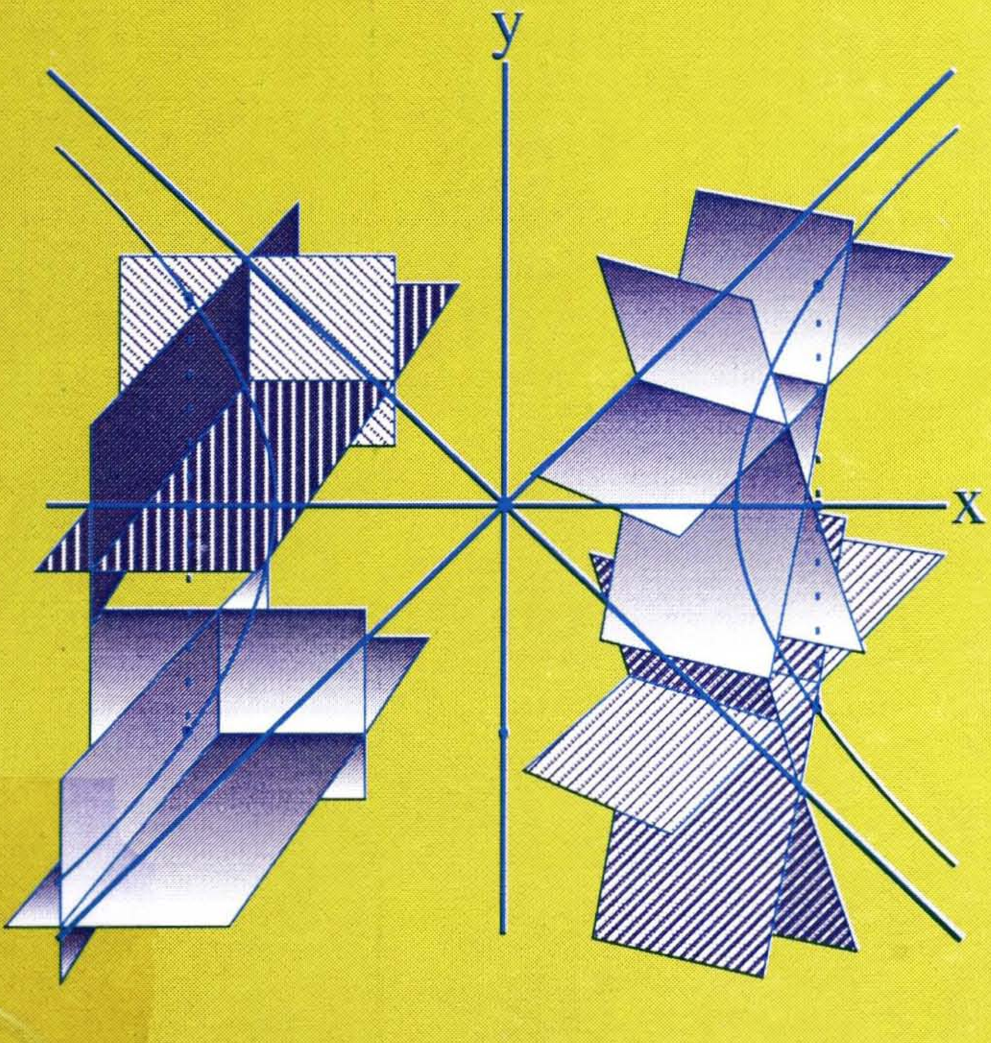
868

Matemáticas complementarias

Fausto Cervantes Ortiz



Básicas

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Matemáticas complementarias

Fausto Cervantes Ortiz

Matemáticas complementarias

Este material fue aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 21 de enero del 2004.

Matemáticas complementarias

Fausto Cervantes Ortiz

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-31-0287-5

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Matemáticas complementarias

1a. edición, 2004
3a. reimpresión, 2007

Impreso en México

Índice

Introducción

Este libro surge de notas preparadas para impartir el curso de la UEA Complementos de matemáticas en la unidad. Para escribirlo se siguió minuciosamente el programa oficial vigente.

Siendo que no hay algún libro de texto que trate todos los temas requeridos en el mismo volumen, la información se debe colectar de diversas fuentes, que por lo regular también difieren en su notación. De esta manera este texto contribuye en presentar todo en un mismo libro, con notación consistente a lo largo del texto.

Se espera que sea de utilidad a los alumnos, dado que son ellos quienes encuentran las mayores dificultades al conseguir la información necesaria. Pensando en ellos se incluye una buena cantidad de ejemplos, así como numerosos ejercicios con soluciones para que el alumno los resuelva antes de cada examen y pueda evaluar por sí mismo su grado de avance.

El autor agradecerá toda sugerencia o crítica que sirvan para mejorarlo, así como los errores que se sirvan señalar en esta versión.

México, D. F. febrero de 2004.

Capítulo 1

Ecuaciones lineales, matrices y determinantes

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es aquella que sólo involucra potencias de primer grado en sus variables. Si en una ecuación lineal hay dos variables, se puede representar en el plano cartesiano como una recta. Frecuentemente se utilizará $x_1 = x$, $x_2 = y$, por razones de utilidad posteriores.

Aunque una ecuación tenga un número mayor de variables, las propiedades básicas serán similares a las de las ecuaciones de dos variables. Para tres variables se usará $x_3 = z$, y para más variables se seguirá con x_4, x_5, etc. Llamamos solución de una ecuación a un valor o un conjunto de valores que satisfacen idénticamente la ecuación.

Cuando tenemos un conjunto de ecuaciones lineales cuyas soluciones deben ser las mismas para cada ecuación y variable, hablamos de un sistema de ecuaciones lineales. Resolver un sistema de ecuaciones implica hallar un conjunto de valores de cada variable que satisfaga todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

En un conjunto de ecuaciones lineales no siempre tenemos solución única, sino que podemos tener infinitas soluciones o no tener ninguna.. Una ecuación en dos variables de la forma $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ describe una recta en el plano con pendiente $-A/B$ y ordenada al origen $-C/B$.

Si el sistema tiene solución única, al graficar las ecuaciones tendremos un par de rectas que se cortan en un solo punto. En este caso se dice que el sistema es consistente y determinado. Esto se ve en la siguiente gráfica (figura 1.1):

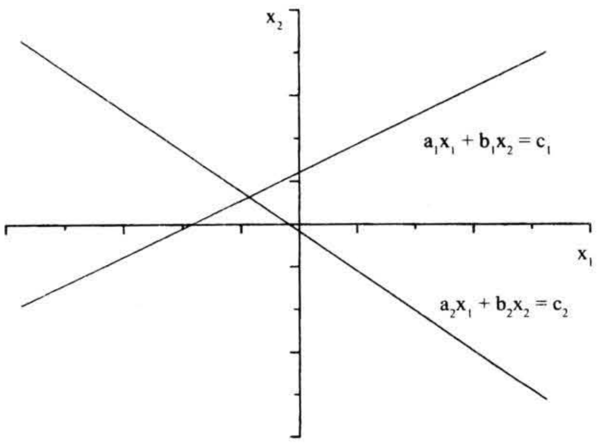


Figura 1.1. Sistema de ecuaciones con solución única.

Si el sistema no tiene solución, tendremos un par de rectas paralelas. En este caso se dice que el sistema es inconsistente. La situación gráfica es la siguiente (figura 1.2):

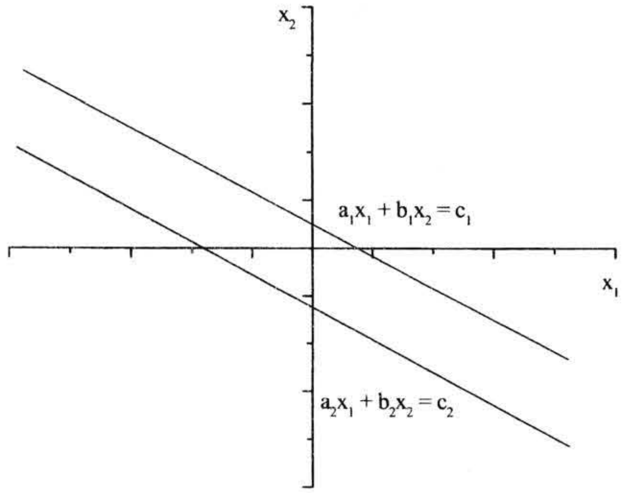


Figura 1.2. Sistema sin solución.

Si el sistema tiene infinidad de soluciones, tendremos una sola recta representada por dos ecuaciones diferentes. En este caso se dice que el sistema es consistente, pero indeterminado. La gráfica es la siguiente (figura 1.3):

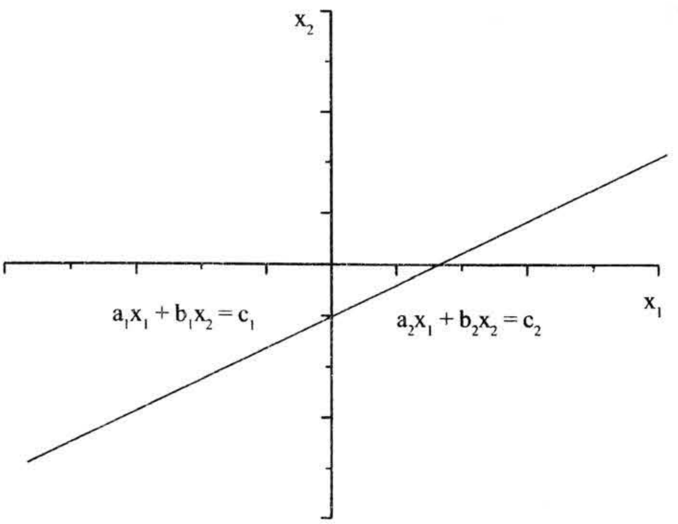


Figura 1.3. Sistema con infinidad de soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse por varios métodos, que estudiaremos en este capítulo.

Método de eliminación

Un método muy usual (sobre todo para computación) es el método de eliminación de Gauss. Este método es general, sirve para cualquier sistema de n ecuaciones con m incógnitas. Estos en general tendrán la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Para esto, definimos una matriz como un arreglo de números acomodados en lugares definidos por renglones y columnas. Cada número tendrá su lugar dando el número de renglón y de columna que ocupa. El orden en que se hace es éste, por lo que si se da primero el número de columna, se tendrá un elemento incorrecto.

En general las matrices pueden tener cualquier número de renglones y de columnas, pero en el caso especial en que hay igual número de renglones que de columnas, decimos que es una matriz cuadrada.

Definimos la matriz aumentada de un sistema lineal de ecuaciones como aquella que consta de todos los coeficientes de las variables, más los términos independientes. Para el sistema dado antes la matriz aumentada es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Para encontrar la solución de un sistema podemos operar en la matriz aumentada realizando las siguientes operaciones permitidas:

1 suma (o resta) de un renglón a otro

2 multiplicación (o división) de un renglón por una constante

3 intercambio de orden entre los renglones

El objetivo de estas manipulaciones es obtener una matriz de las mismas dimensiones que conste de ceros, excepto en la diagonal, donde trataremos de obtener unos. A este proceso se le llama diagonalización.

El proceso general es el siguiente:

1 Si el elemento a_{11} es cero, hacemos que sea diferente de cero intercambiando el orden de los renglones. Si ya desde el principio es diferente de cero, se deja igual.

2 Se multiplican todos los renglones por a_{11}/a_{1i}, con i el número de renglón, pero $i \neq 2$, y se les resta el primer renglón. En este paso ya tenemos que todos los elementos de la primera columna son cero, excepto el primero.

3 Se hace que el elemento a_{22} sea diferente de cero, de manera similar que para a_{11}.

4 Se multiplican todos los renglones por a_{22}/a_{2i}, con i el número de renglón, pero $i \neq 2$, y se les resta el segundo renglón. En este paso ya tenemos toda la segunda columna con ceros excepto el segundo elemento.

5 Se sigue este proceso hasta el elemento de la forma a_{rr} más abajo que se pueda encontrar en la matriz. Si el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, será el elemento a_{nn}, si tiene más incógnitas que ecuaciones será el a_{mm}, y si tiene igual número de incógnitas que ecuaciones, será el a_{mn}.

En el proceso de diagonalización generalmente surgen fracciones, con lo cual el alumno encuentra más difícil trabajar. Aunque es muy recomendable que el alumno repase fracciones, es posible evitarlas si en lugar de dividir multiplica los renglones para hallar el mínimo común múltiplo de los primeros elementos del renglón y luego restarlos. Esto se aprende mejor a través de ejemplos.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$
$3x_1 - 4x_2 + x_3 = -9$
$-3x_1 + x_2 - 5x_3 = 14$

Solución:

La matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -9 \\ -3 & 1 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

Para introducir un cero en el tercer renglón, primer columna, necesitamos un tres en la primer columna. Este ya está en el segundo renglón, así que sumamos el segundo renglón al tercero.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a multiplicar el primer renglón por 3 y al segundo por 5, para que así tengamos el mismo número en la primer columna, tanto en el primero como en el segundo renglón.

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -6 & 3 \\ 15 & -20 & 5 & -45 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Al segundo renglón le restamos el primero, lo que nos dará:

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -26 & 11 & -48 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos el segundo renglón por 3 y el tercero por -26 para tener en la segunda columna el mismo número tanto en el segundo como en el tercer renglones, lo que nos dará:

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -78 & 33 & -144 \\ 0 & 78 & 104 & -130 \end{pmatrix}$$

Al tercer renglón le sumamos el segundo, lo que nos da:

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -78 & 33 & -144 \\ 0 & 0 & 137 & -274 \end{pmatrix}$$

Para introducir un cero en el primer renglón, tercer columna, necesitamos el mismo número en dos renglones de la misma columna. Al tercer renglón lo dividimos entre 137 y lo multiplicamos por 2, al primero lo dividimos entre 3, con lo cual obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -78 & 33 & -144 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Al primer renglón le sumamos el tercero:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -78 & 33 & -144 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Al tercer renglón lo dividimos entre 2 y lo multiplicamos por -33, lo cual da:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -78 & 33 & -144 \\ 0 & 0 & -33 & 66 \end{pmatrix}$$

Al segundo renglón le sumamos el tercero:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -78 & 0 & -78 \\ 0 & 0 & -33 & 66 \end{pmatrix}$$

El segundo renglón lo dividimos entre 37 y el tercero entre -33:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Al primer renglón le sumamos el segundo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por último, al primer renglón lo dividimos entre 5 y al segundo entre -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La última columna nos da la solución: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. También se escribe esto mismo como: $(x_1,x_2,x_3) = (-1,1,-2)$, forma que se usará a lo largo de este texto.

El ejemplo anterior muestra el proceso general de tal forma que podemos reconocer la solución como única. Podría ser que haya infinidad de soluciones o que no la haya. Esto lo reconocemos durante el proceso si obtenemos un renglón donde sólo haya ceros, o un renglón donde sólo la ultima columna sea diferente de cero.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$
$x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$

Solución:

La matriz aumentada es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de este ejemplo se abreviará el desarrollo. Para especificar los pasos que se seguirán se usará una flecha , y se indicarán las operaciones realizadas en forma abreviada. Así, si multiplicamos el tercer renglón por tres, escribiremos 3R3 y si lo dividimos será R3/3. Si se resta el segundo al tercero se escribirá R3 - R2. Si intercambiamos los renglones 2 y 3 se escribirá R2 ↔ R3. Cuando haya dos o más operaciones (lo cual nos ahorrará bastante espacio), se separarán por una coma.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} 3R3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix} R3 - R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix} 3R1, 2R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 12 \\ 6 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R2\text{-}R1 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix} R2 - R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este punto ya podemos observar que el sistema tiene infinidad de soluciones, puesto que el tercer renglón consta únicamente de ceros. Para proseguir podemos eliminar el tercer renglón, o sea sustituirla por una matriz de 2×4 y seguir el proceso.

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix} 3R2, 7R1 \rightarrow \begin{pmatrix} 42 & -21 & 63 & 84 \\ 0 & 21 & -33 & -18 \end{pmatrix} R1 + R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 42 & 0 & 30 & 66 \\ 0 & 21 & -33 & -18 \end{pmatrix} R1/42, R2/21 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & -11/7 & -6/7 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se puede expresar nuevamente como un sistema de ecuaciones:

$x_1 + 5x_3/7 = 11/7$
$x_2 - 11x_3/7 = -6/7$

Así, si se fija el valor de x_3 (con un parámetro t), se tendrá la solución:

$x_3 = t$, $x_2 = -6/7 + 11t/7$, $x_1 = 11/7 - 5t/7$,

que también se expresa como:

$(x_1, x_2, x_3) = (11/7, -6/7, 0) + t(-5/7, 11/7, 1)$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$2x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$
$3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 1$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 8 & 1 \end{pmatrix} 3R1, 6R2, 2R3 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 & -6 \\ 6 & -12 & 18 & 24 \\ 6 & -6 & 16 & 2 \end{pmatrix} R3 - R1, R2 - R1 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 & -6 \\ 0 & -9 & 3 & 30 \\ 0 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} 3R1, -R2, 3R3 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -9 & 45 & -18 \\ 0 & 9 & -3 & -30 \\ 0 & -9 & 3 & 24 \end{pmatrix} R1 + R2, R3 + R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 0 & 42 & -48 \\ 0 & 9 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

En este punto nos detenemos al ver que el último renglón consta de ceros a excepción de la última columna, lo que nos indica que el sistema es inconsistente. Esto se ve mejor si escribimos la matriz como un sistema:

$18\ x_1 + 0\ x_2 + 42\ x_3 = -48$
$0x_1 + 9\ x_2 - 3\ x_3 = -30$
$0\ x_1 + 0\ x_2 + 0\ x_3 = -6,$

y la inconsistencia se ve en la tercera ecuación, pues sumando únicamente ceros se obtiene una cantidad diferente de cero.

Cuando el sistema de ecuaciones tenga menos ecuaciones que incógnitas, nunca habrá solución única, sino que se tendrá infinidad de soluciones con tantos parámetros libres como ecuaciones falten para igualar el número de incógnitas, a no ser que el sistema sea inconsistente.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$x_1 - 2\ x_2 + x_3 - 4\ x_4 = 1$
$x_1 + 3\ x_2 + 7\ x_3 + 2\ x_4 = 2$
$x_1 - 12\ x_2 - 11\ x_3 - 12\ x_4 = 5$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -12 & 5 \end{pmatrix} \text{R2 - R1, R3 - R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -8 & 4 \end{pmatrix} \text{5R1, 2R2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 & -20 & 5 \\ 0 & 10 & 12 & 12 & 2 \\ 0 & -10 & -12 & -8 & 4 \end{pmatrix} \text{R1 + R2, R3 + R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 19 & -8 & 7 \\ 0 & 10 & 12 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{R1/5, R2/10, R3/4} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 19/5 & -8/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Al reescribirlo como un sistema encontramos que:

$x_1 + 19x_3/5 - 8x_4/5 = 7/5$
$x_2 + 6x_3/5 + 6x_4/5 = 1/5$
$x_4 = 3/2$

Haciendo $x_3 = t$ y sustituyendo x_4 hallamos:

$x_1 = 3 - 19t/5$
$x_2 = -1 - 6t/5$
$x3 = t$
$x_4 = 3/2$

o bien:

$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3,-1,0,3/2) + t(-19/5, -6/5, 1, 0)$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 9$
$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 7$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \text{2R1, 2R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 & 18 \\ 2 & -4 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \text{R2 - R1, R3 - R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aquí observamos que el tercer renglón contiene sólo ceros excepto en la última columna, lo que indica que hay una suma de ceros que nos da como suma algo diferente de cero. O sea que el sistema no tiene solución por ser inconsistente.

Ejercicios 1.1:

Resolver los sistemas siguientes

1) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16$

2) $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$
$4x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$

3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$
$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4$
$3x_1 + 2x_2 + 17x_3 = 1$

4) $2x_1 + 3x_2 = 3$
$x_1 - 2x_2 = 5$
$3x_1 + 2x_2 = 7$

5) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2$
$2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 5$
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4$

6) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$
$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9$
$3x_1 + 6x_2 - x_3 + 8x_4 = 10$

7) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5$
$x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$
$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4$

8) $x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 2$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$

9) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16$

10) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16$

11) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16$

12) $2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7$
$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3$
$3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5$

13) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$

14) $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5$
$x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1$
$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$

15) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$

Sistemas homogéneos

Cuando en un sistema de ecuaciones todos los términos independientes valen cero, se dice que es un sistema homogéneo. Recordemos que el criterio para que no haya solución es que un renglón conste de ceros excepto en la última columna, pero si ya desde el principio la última columna consta de ceros, pues nunca habrá este caso; así pues, en un sistema homogéneo siempre se tiene por lo menos una solución, que consiste en que todas las x_i valgan cero. A esta se le llama solución trivial. Además de la trivial, algunos sistemas pueden tener infinitas soluciones no triviales. En particular, siempre que se tienen más incógnitas que ecuaciones, se tienen soluciones no triviales. Para saber si un sistema tiene soluciones no triviales y encontrarlas, podemos usar el método de eliminación y dependiendo lo que obtengamos decidimos: si algún renglón tiene solo ceros, entonces hay infinidad de soluciones, que se encuentran al recobrar el sistema como se hace en el caso no homogéneo; pero si ningún renglón consta únicamente de ceros, sólo existe la solución trivial.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

Solución:

Resolviendo por eliminación,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} R3 - 2R1,\ R2 - 3R1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & -16 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix} 2R3 - R2,\ 5R1 + 2R2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R1/5,\ R2/10 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde podemos hacer $x_3 = t$, con lo cual: $x_1 = (2/5)t$, $x_2 = (8/5)t$, o bien,

$(x_1,x_2,x_3) = (1,2/5,8/5)t$.

Ejemplo:

Resolver el sistema homogéneo siguiente:

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema (como en este caso todos los términos independientes valen cero, no es necesario tomar la aumentada) es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} R2 - 3R3,\ 2R3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} R3 - R1,\ R2/5 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} R1 - 3R2,\ R3 + 7R2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} 3R1 + 2\ R2,\ 6R2 - R3 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} R1/6,\ R2/6,\ R3/6 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que aquí la única solución posible es la trivial.

Ejercicios 1.2:

Resolver los siguientes sistemas homogéneos.

1) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 - 8x_2 + 8x_3 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$

2) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$

3) $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$
$4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 = 0$

4) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$
$-7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0$

5) $4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$

6) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$

7) $2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 0$
$2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$
$x_1 + 14x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$

8) $x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0$
$x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 0$
$11x_1 + 20x_3 - 9x_4 = 0$

9) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$
$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 - 3x_4 = 0$

10) $x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

Sistemas con parámetros adicionales

Hay algunos sistemas en los que intervienen parámetros adicionales a las incógnitas del sistema. En estos sistemas lo importante es hallar los valores de tales parámetros para que haya soluciones. Para determinar si hay o no solución se usa como criterio lo que sucede con la matriz diagonal del sistema: si hay algún denominador en donde aparezca el parámetro, el sistema tiene solución única donde el denominador no se haga cero, para los valores en que sí hay ceros en el denominador, se debe analizar cada caso por separado; si al sustituir esos valores hay renglones de ceros únicamente hay infinitas soluciones, pero si en la última columna no hay cero, no hay solución. También hay que observar qué valores del parámetro hacen que algunos renglones de la matriz se vuelvan múltiplos, etc. Esto se verá con cuidado en los ejemplos.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$kx_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + kx_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + kx_3 = 1$

Solución:

Resolvemos por eliminación,

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \text{kR2 - R1, kR3 - R1} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k-1 \end{pmatrix} \text{R2/(k-1), R3/(k}^2\text{-1)} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ 0 & 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix} \text{R1 - R2,}$$

$$\text{R3 - R2} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 & \frac{k}{k+1} & \frac{k}{k+1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2k}{k+1} & \frac{k}{k+1} \end{pmatrix} \text{(k+1)R1/k, (k+1)R2, (k+1)R3/(k}^2\text{+2k)} \rightarrow \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} \text{R1-R3,}$$

$$\text{R2 - R3} \rightarrow \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 & \frac{k+1}{k+2} \\ 0 & k+1 & 0 & \frac{k+1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} \text{R1/(k+1), R2/(k+1)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

así que la solución es: $(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)/(k+2)$, lo cual no tiene solución para $k = 2$. Por otra parte, debemos notar que si tomamos en la matriz aumentada original $k = 1$, todos los renglones son iguales, así que para $k = 1$ tendremos soluciones infinitas de la forma: $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0) + (-1,1,0)s + (-1,0,1)t$.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$kx_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + kx_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Solución:

Resolvemos por eliminación,

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{kR2 - R1, kR3 - R1} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-k & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 \end{pmatrix} \text{R2/(k-1), R3/(k-1)} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{kR3 - R2,}$$

$$\text{kR1 - R2} \rightarrow \begin{pmatrix} k^2 & 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k-1 \end{pmatrix} \text{R1 - R3, (k-1)R2 - R3, R3/(k-1)} \rightarrow \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{R1/k2, R2/(k2-k)} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

esto implica que la solución $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,1)$ es única. Pero si observamos que $k = 1$ nos da renglones iguales, resulta que para ese valor de k hay infinitas soluciones de la forma: $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0) + (-1,1,0)s + (-1,0,1)t$.

Ejercicios 1.3:

Encontrar los valores de k para que el sistema dado: tenga solución única, tenga infinidad de soluciones, no tenga solución (no es necesario dar la forma de la solución).

1) $x_1 - x_2 = 3$
   $2x_1 - 2x_2 = k$

2) $kx_1 - x_2 = 0$
   $x_1 + kx_2 = 0$

3) $(k - 3)x_1 + x_2 = 0$
   $x_1 + (k - 3)x_2 = 0$

4) $kx_1 - x_2 = 2$
   $x_1 + kx_2 = 3$

5) $x_1 - 2kx_2 = 3$
   $5x_1 + x_2 = -k$

6) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$
   $3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2$
   $4x_1 + x_2 + (k - 4)x_3 = k + 2$

7) $2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -6$
$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$
$3x_1 - 6x_2 - kx_3 = 5$

8) $-x_1 + 2x_2 + kx_3 = -9$
$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$
$x_1 - 6x_2 - x_3 = k$

9) $kx_1 + 2x_2 + x_3 = 7$
$x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 21$
$x_1 - kx_2 - x_3 = 2$

10) $x_1 + x_2 + 5x_3 = -9$
$x_1 - 5x_2 + (k - 4)x_3 = 2$
$7x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 15$

1.2 Matrices

Las matrices como elementos matemáticos tienen propiedades especiales, por lo que también merecen examinarse haciendo a un lado de momento su relación con los sistemas de ecuaciones lineales. A las cantidades numéricas les llamaremos escalares a partir de aquí para distinguirlas de las cantidades matriciales.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Las matrices se pueden sumar si y sólo si son de las mismas dimensiones. Se define la suma de dos matrices A y B como la matriz C cuyos elementos son la suma de cada uno de los elementos de a y b correspondientes, esto es, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Esto se expresa corrientemente diciendo que las matrices se suman "entrada por entrada".

Ejemplo:

Sumar las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 \\ -8 & -3 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 17 & 9 \\ -6 & -5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ -8 & -3 & -4 \\ 8 & 13 & 4 \\ -7 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+12 & 11+0 & 4+4 \\ -8-8 & -3-3 & 5-4 \\ 9+8 & 3+13 & 6+4 \\ 8-7 & 17+0 & 9+7 \\ -6+6 & -5-4 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 8 \\ -16 & -6 & 1 \\ 17 & 16 & 10 \\ 1 & 17 & 16 \\ 0 & -9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Para la suma de matrices se cumplen las siguientes propiedades:

a) A + B = B + A propiedad conmutativa

b) A + (B + C)= (A + B) + C propiedad asociativa

O sea que para sumar cualquier número de matrices podemos proceder en cualquier orden.

Llamamos matriz nula de dimensiones $m \times n$ a la matriz que consta únicamente de ceros. Cuando en una matriz n = m, se le llama cuadrada. Llamamos matriz unitaria de orden n a la matriz cuadrada de $n \times n$ que consta únicamente de ceros, excepto en su diagonal, que consta de unos.

Además de poder sumar matrices, las podemos restar. Esto se hace definiendo la matriz D = -A como la matriz a la que se le cambia de sigo a todos sus elementos: $d_{ij} = -a_{ij}$. De este modo, la resta de matrices B - A será la suma de B + (-A).

Ejemplo:

Hacer la resta:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 & 8 \\ 11 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -8 \\ -5 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -2-0 & 5-3 & -3-9 & 8-(-8) \\ 11-(-5) & 7-6 & -6-3 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -12 & 16 \\ 16 & 1 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Para multiplicar una matriz por un escalar, multiplicamos sus elementos por la misma constante. Esto es:

$nA = M$

$m_{ij} = na_{ij}$

La multiplicacion de matrices por escalares tiene las siguientes propiedades:

a) (a + b) A = aA + bA propiedad distributiva

b) (ab)A = a (bA) popiedad asociativa

c) a (A + B) = aA + aB propiedad distributiva

Ejemplo:

Hacer las operaciones indicadas.

$$2\begin{pmatrix} -2 & 2 & -12 & 16 \\ 16 & 1 & -9 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 & 7 \\ 9 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -24 & 32 \\ 32 & 2 & -18 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -3 & -15 & 21 \\ 27 & 0 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 7 & -9 & 11 \\ 5 & 2 & -36 & -20 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

A diferencia de lo que se podría esperar ingenuamente, el producto de dos matrices NO es la matriz que consta de los productos de los elementos correspondientes de ambas matrices. La razón de que la definición del producto entre dos matrices sea diferente es su utilidad, ya que un producto "entradad por entrada" no tiene utilidad; pero el producto que se define a continuación puede ser útil en varios casos, como tendremos oportunidad de ver más adelante.

Se define el producto de dos matrices A = a_{ij} de dimensiones m × r y B = b_{ij} de dimensiones r × n como la matriz C = c_{ij} de dimensiones m × n tal que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}+ \ldots + a_{ir}b_{rj}$$

Esta definición implica que sólo podemos multiplicar una matriz de cierto número de columnas, por otra que tenga el mismo número de renglones (independientemente del número de renglones de la primera o de columnas de la segunda). Para llevar a cabo la operación se multiplica cada elemento del primer renglón por los correspondientes elementos de la primer columna y se suman los productos resultantes. Después se multiplica el primer renglón por la segunda columna, y luego por la tercer columna... así hasta llenar el primer renglón de la matriz producto. Habiendo hecho esto, multiplicamos el segundo renglón por la primer columna, luego por la segunda columna, etc. Al final se obtiene una matriz con el mismo número de renglones que la primera y de columnas que la segunda.

Ejemplo:

Multiplicar las matrices dadas,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & -3 \\ 5 & -4 & 1 & 11 \\ 9 & 13 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2\times3+3\times5+5\times9 & 2\times5+3\times(-4)+5\times13 & 2\times8+3\times1+5\times0 & 2\times(-3)+3\times11+5\times7 \\ -7\times3+3\times5+1\times9 & -7\times5+3\times(-4)+1\times13 & -7\times8+3\times1+1\times0 & -7\times(-3)+3\times11+1\times7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+15+45 & 10-12+36 & 18+3+0 & -6+33+35 \\ -21+15+9 & -35-12+13 & -56+3+0 & 21+33+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 63 & 19 & 72 \\ 3 & -34 & -53 & 61 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de matrices NO es conmutativa. Esto se ve fácilmente desde el momento que si tenemos un par de matrices, una cuadrada y la otra rectangular, es imposible hacer el producto en ambos sentidos. Sólo en caso de que ambas matrices sean cuadradas se pueden hacer los dos productos AB y BA, pero esto en general nos dará matrices diferentes, son raros los casos en que coinciden ambos productos. Un poco más adelante veremos las matrices que tienen esta propiedad especial de ser conmutativas en la multiplicación.

Ejemplo:

Dadas las siguientes matrices, hacer los productos A × B y B × A y comparar.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 10-24+2 & -2-16+4 & 12+40-8 \\ 25-0-3 & -5-0-6 & 30+0+12 \\ 20-36-7 & -4-24-14 & 24+60+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -14 & 44 \\ 22 & -11 & 42 \\ -23 & -42 & 112 \end{pmatrix}.$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 10-5+24 & 40-0+72 & -10-3+42 \\ -6-10+20 & -24-0+60 & 6-6+35 \\ -2-10+16 & -8-0+48 & 2-6+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 112 & 29 \\ 4 & 36 & 35 \\ 4 & 40 & 24 \end{pmatrix}.$$

Como vemos, los productos no son iguales.

La multiplicación de matrices tiene las propiedades siguientes:

a) (AB) C = A (BC) asociativa

b) (A + B) C= AC + BC distributiva

c) C (A + B) = CA + CB distributiva

Potencias de matrices cuadradas

La operación de potenciación sólo se puede definir para matrices cuadradas, pues de otra forma, no habría sentido en los productos involucrados.

La potencia A^n, con n un número natural, se define como sigue:

$A^n = AA\ A \ldots A$, n veces

Ejemplo:

Elevar al cubo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^3 = A \times A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -8 & 6 \\ 22 & 76 & 11 \\ 96 & 116 & 77 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 56 & 360 & -54 \\ 468 & 308 & 261 \\ 1080 & 1692 & 695 \end{pmatrix}$$

Matriz unitaria

La matriz cuadrada de orden n que consta de ceros excepto en la diagonal, que consta de unos; se llama matriz unitaria de orden n y se simboliza con I_n. Frecuentemente se omite el subíndice y sólo se escribe I, ya que por el contexto se puede saber cuál es el orden de la matriz.

La matriz unitaria cumple que para toda matriz cuadrada A:

$AI = IA = A$,

esto es, la matriz unitaria es el neutro multiplicativo de las operaciones matriciales.

Matriz inversa

Hemos visto que con las matrices pueden efectuarse algunas de las principales operaciones aritméticas conocidas. Sin embargo algunas operaciones no están definidas; por ejemplo, no esta definida la división de dos matrices. La expresión A/B no tiene sentido. Lo mas parecido a la operación de división tiene que ver con la inversa de una matriz.

La inversa de una matriz A es aquella matriz B (que se simboliza como A^{-1}) que al multiplicarla por A (independientemente del orden de los factores) nos da la matriz unitaria de la dimensión correspondiente, esto es:

$A \times B = I = A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

Para hallar la inversa de una matriz hay un método muy efectivo que consiste en operar en la matriz hasta convertirla en la matriz unitaria y después repetir la secuencia de operaciones. Esto nos llevará a la matriz inversa, lo cual puede comprobarse haciendo la multiplicación de las matrices para ver si nos da la unitaria. En la práctica es común escribir ambas matrices (la matriz a invertir y la unitaria) para operar sinmultáneamente con ellas. No toda matriz se puede invertir, a una matriz no invertible se le llama singular. Si no puede obtenerse de ella la unitaria, sino que en algún momento se obtiene un renglón que conste sólo de ceros, sabremos que se trata de una matriz singular.

Ejemplo:

Hallar la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Reescribimos la matriz aumentándole la unitaria y aplicamos eliminación:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{R1/5, R2/3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 6/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 5/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{R2 - R1, R3 - R1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 6/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 7/15 & 7/15 & -1/5 & 1/3 & 0 \\ 0 & 9/5 & 14/5 & -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{5R1, 15R2/7, 5R3/9} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/7 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 14/9 & -1/9 & 0 & 5/9 \end{pmatrix} \text{R1 - R2, R3 - R2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 10/7 & -5/7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/7 & 5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 5/9 & 20/63 & -5/7 & 5/9 \end{pmatrix} \text{R1/5, 9R3/5} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/7 & 5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix} \text{R1 - R3, R2 - R3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/7 & 8/7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix}$$

en este punto nos detenemos, puesto que ya tenemos en la primera parte la matriz unitaria, con lo que la matriz inversa resulta ser la segunda parte, o sea:

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar, multiplicamos esta por la matriz original:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/7-1+24/7 & 40/7+2-54/7 & -5-1+6 \\ -6/7-2+20/7 & 24/7+4-45/7 & -3-2+5 \\ -2/7-2+16/7 & 8/7+4-36/7 & -1-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/7+24/7-1 & -2/7+16/7-2 & -12/7+40/7-4 \\ -5+6-1 & -1+4-2 & -6+4-2 \\ 20/7-27/7+1 & 4/7-18/7+2 & 24/7-45/7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual observamos que en efecto se trata de la inversa.

Matriz transpuesta

Cuando en una matriz se hace el intercambio de renglones por columnas y viceversa, se obtiene la matriz transpuesta. Si A es la matriz original, la transpuesta de A se simboliza con A^t. Más adelante se verá la utilidad de la matriz transpuesta.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicios 1.4:

Realizar las operaciones indicadas con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & 7 \\ 9 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & -3 & 9 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

1) 2A - 3B

2) 2C - B + A

3) 5AB

4) 3BC + 4AC

5) AB - BA

6) 4AB - 7BC + 6AC

7) $(A + B)^2$

8) $A^2 + 2AB + B^2$

9) $(A + B + C)^2$

10) $ABC + B^3$

Encontrar las inversas de las matrices dadas:

11) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$20)\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Uso de matrices inversas para resolver sistemas lineales

El producto de matrices y las matrices inversas nos sirven para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El sistema lineal:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

Si hacemos $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$, se puede reescribir como:

$$AX = B$$

En esta ecuación matricial la incógnita es la matriz X. Para "despejarla" no se puede pasar dividiendo a la matriz A, puesto que no está definida la división de matrices. En lugar de eso, lo que se hace es utilizar la inversa. Para "despejar" pues, lo que se tiene que hacer es multiplicar a la matriz B por la inversa de A, esto es:

$$X = A^{-1}B.$$

Esto nos dará los valores de x_i que satisfacen el sistema dado. Debemos notar que, como no toda matriz A es invertible, no todo sistema se puede resolver por este método.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -9 \end{array}$$

$-3x_1 + x_2 - 5x_3 = 14$

Solución:

Podemos reescribirlo como:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

de este modo, la solución se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Así que debemos hallar la inversa de la matriz de coeficientes, lo que haremos por medio de eliminación:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{R1/5, R2/3, R3/-3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & -2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & -4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \text{R2 - R1, R3 - R1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/5 & -2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -26/15 & 11/15 & -1/5 & 1/3 & 0 \\ 0 & -11/15 & 31/15 & -1/5 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \text{5R1/2, -15R2/26, -15R3/11} \rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11/26 & 3/26 & -5/26 & 0 \\ 0 & 1 & -31/11 & 3/11 & 0 & 5/11 \end{pmatrix}$$

$$\text{R1 - R2, R3 - R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & -15/26 & 5/13 & 5/26 & 0 \\ 0 & 1 & -11/26 & 3/26 & -5/26 & 0 \\ 0 & 0 & -685/286 & 45/286 & 5/26 & 5/11 \end{pmatrix} \text{-26R1/15, -26R2/11, -286R3/685} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -13/3 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -26/11 & 1 & -3/11 & 5/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -45/685 & -11/137 & -26/137 \end{pmatrix} \text{R1 - R3, R2 - R3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -13/3 & 0 & 0 & -247/411 & -104/411 & 26/137 \\ 0 & -26/11 & 0 & -312/1507 & 806/1507 & 26/137 \\ 0 & 0 & 1 & -9/137 & -11/137 & -26/137 \end{pmatrix} \text{-3R1/13, -11R2/26} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 19/137 & 8/137 & -6/137 \\ 0 & 1 & 0 & 12/137 & -31/137 & -11/137 \\ 0 & 0 & 1 & -9/137 & -11/137 & -26/137 \end{pmatrix}$$

así que la matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} 19/137 & 8/137 & -6/137 \\ 12/137 & -31/137 & -11/137 \\ -9/137 & -11/137 & -26/137 \end{pmatrix}$$

con ella hacemos el producto indicado:

$$\begin{pmatrix} 19/137 & 8/137 & -6/137 \\ 12/137 & -31/137 & -11/137 \\ -9/137 & -11/137 & -26/137 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/137-72/137-84/137 \\ 12/137+279/137-154/137 \\ -9/137+99/137-364/137 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

que nos da la solución $(x_1,x_2,x_3) = (-1,1,-2)$.

Ejercicios 1.5:

Resolver los siguientes sistemas usando la matriz inversa.

1) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$
$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$
$3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25$

2) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

3) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3$
$5x_1 - x_2 - x_3 = 4$

4) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$
$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

5) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

6) $-x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$
$7x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2$
$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$

7) $4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 6$
$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7$
$5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2$

8) $9x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 5$
$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6$
$-2x_1 + 4x_2 - 8_3 = 7$

9) $5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$
$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

10) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$
$8x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -4$
$3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2$

1.3 Determinantes

A las matrices cuadradas se les asigna un escalar que depende de los valores de cada uno de los elementos. Para comenzar definiremos el determinante de una matriz de 2 × 2:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el determinante de A como:

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Se acostumbra escribir el determinante de una matriz A con líneas verticales, como se muestra enseguida:

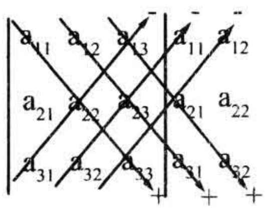
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Para matrices de 3 × 3 se define el determinante como:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Para recordar esta fórmula fácilmente, a veces se memoriza usando flechas para indicar los productos y sus signos, como se muestra abajo:



Ejemplo:

Encontrar el determinante de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución

De la fórmula para las matrices de 2×2 encontramos que:

$\det M = 2 \times 7 - (-3) \times 5 = 29$

Ejemplo:

Evaluar el determinante de la matriz:

$$N = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -7 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Solución:

De la fórmula para las matrices de 3×3 encontramos que:

$\det N = (-6) \times 4 \times (-9) + (-5) \times 0 \times (-7) + 1 \times 2 \times 3 - 3 \times 4 \times (-7) - 1 \times (-5) \times (-9) - 2 \times (-6) \times 0 = 261$

Cofactores

Para matrices de órdenes superiores la definición del determinante en forma análoga a la de las anteriores se complica enormemente, por lo cual se definirá en términos de cofactores. Para eso vamos a definir primero a los cofactores.

Si se tiene una matriz A de orden n, se puede extraer de ella una matriz M de orden n - 1 al eliminar un renglón y una columna. En este caso, se tiene un elemento de la matriz que pertenece tanto al renglón como a la columna, digamos a_{ij} (esto es, se eliminó el renglón número i y la columna número j). Se define el cofactor c_{ij} de el elemento a_{ij} como:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M$$

Ejemplo:

Calcular los cofactores de la matriz para los elementos de la segunda columna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Los cofactores serán:

$c_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $c_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $c_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 9 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; lo cual al hacer los cálculos necesarios nos dará:

$c_{12} = 62$, $c_{22} = 36$, $c_{32} = 12$, $c_{42} = -2$.

Cálculo de determinantes por cofactores

El determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ se calcula encontrando los cofactores de cualquier renglón (o columna) de la matriz. Por ejemplo, para una matriz de 3×3, el determinante será:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Esto coincide con la definición dada anteriormente, lo cual puede verificarse comparando los productos y signos en cada caso.

Es importante recalcar que para calcular el determinante se puede tomar cualquier renglón o cualquier columna. Esto nos permite aprovechar la presencia de ceros en la matriz para disminuir el número de operaciones a realizar durante el cálculo de un determinante.

Ejemplo:

Hallar el determinante de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 8 & 4 \\ -7 & 22 & 4 & -6 \\ 11 & 5 & 19 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para calcularlo tomemos el primer renglón para calcular los cofactores:

$$\det M = 2\begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 22 & 4 & -6 \\ 5 & 19 & 13 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -7 & 4 & -6 \\ 11 & 19 & 13 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -7 & 22 & -6 \\ 11 & 5 & 13 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ -7 & 22 & 4 \\ 11 & 5 & 19 \end{vmatrix}$$

Ahora tomemos el primer renglón de cada determinante para calcular los cofactores correspondientes:

$$2\{5\begin{vmatrix}4 & -6\\ 19 & 13\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}22 & -6\\ 5 & 13\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}22 & 4\\ 5 & 19\end{vmatrix}\} - \{-\begin{vmatrix}4 & -6\\ 19 & 13\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}-7 & -6\\ 11 & 13\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 11 & 19\end{vmatrix}\} -3\ \{-\begin{vmatrix}22 & -6\\ 5 & 13\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}-7 & -6\\ 11 & 13\end{vmatrix} +$$
$$4\begin{vmatrix}-7 & 22\\ 11 & 5\end{vmatrix}\} - 7\ \{-\begin{vmatrix}22 & 4\\ 5 & 19\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 11 & 19\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix}-7 & 22\\ 11 & 5\end{vmatrix}\} = 2(-106) - (-674) - 3(-1299) - 7(-1729) = 16462$$

Ejemplo:

Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix}6 & 8 & -5 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -1 & 4 & 7\\ 8 & -1 & 7 & 0 & 9\\ 1 & 5 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

Solución:

Tomemos la columna 4 para aprovechar los tres ceros y sólo haya que calcular dos determinantes de orden 4:

$$\begin{vmatrix}6 & 8 & -5 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -1 & 4 & 7\\ 8 & -1 & 7 & 0 & 9\\ 1 & 5 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}6 & 8 & -5 & -3\\ 8 & -1 & 7 & 9\\ 1 & 5 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}6 & 8 & -5 & -3\\ 2 & 0 & -1 & 7\\ 8 & -1 & 7 & 9\\ 1 & 5 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

Ahora, en el primer determinante tomemos el último renglón y en el segundo determinante el segundo renglón:

$$4\{4\begin{vmatrix}6 & -5 & -3\\ 8 & 7 & 9\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}6 & 8 & -3\\ 8 & -1 & 9\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}\} - 3\{-2\begin{vmatrix}8 & -5 & -3\\ -1 & 7 & 9\\ 5 & -2 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 8 & -3\\ 8 & -1 & 9\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix} -7\begin{vmatrix}6 & 8 & -5\\ 8 & -1 & 7\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}\} = 4\{4(378) - 2(531)\} - 3\{-$$
$$2(171) + (-531) - 7(-219)\} = 17514$$

Método para resolver sistemas lineales con determinantes

Para un sistema en el que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, existe un método para saber si no hay solución, si hay soluciones infinitas o si existe solución única y encontrarla, usando determinantes.

Esto sólo funciona para sistemas de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, pues de otro modo la matriz de coeficientes del sistema no sería cuadrada y no se podría calcular el determinante. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{array}$$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$

Para resolverlo se definen los siguientes determinantes del sistema:

Δ: determinante de los coeficientes del sistema

Δ_i: determinante que consta de Δ, pero con la columna i cambiando los coeficientes por b_i.

Con esto se puede saber el carácter de las soluciones del sistema y resolverlo en el caso de que sea solución única. Para ello se usan los siguientes criterios:

Si $\Delta \neq 0$ el sistema tiene solución única, y es: $xi = \Delta_i/\Delta$.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_i = 0$ para toda i, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_i \neq 0$ para alguna i, el sistema no tiene solución

Ejemplo:

Usando determinantes, resolver el sistema:

$2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3$
$4x_1 + 5x_2 - x_3 = 11$
$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 18$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 143$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 11 & 5 & -1 \\ 18 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 143$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \\ -1 & 18 & 5 \end{vmatrix} = 286$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 4 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 18 \end{vmatrix} = 429$$

así que la solución es $(x_1,x_2,x_3) = (1,2,3)$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$
$5x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -11$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \\ -11 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -40$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & -11 & -4 \end{vmatrix} = 136$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 112$$

como $\Delta = 0$, pero los otros determinantes no, vemos que el sistema no tiene solución.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$
$2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

como todos los determinantes valen cero, concluimos que el sistema tiene soluciones infinitas.

Ejercicios 1.6:

Resolver los siguientes sistema usando determinantes.

1) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$
$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$
$3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25$

2) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

3) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3$
$5x_1 - x_2 - x_3 = 4$

4) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$
$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

5) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

6) $-x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$
$7x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2$
$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$

7) $4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 6$
$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7$
$5x_1 + x_2 - 4x_3 = -2$

8) $9x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 5$
$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6$
$-2x_1 + 4x_2 - 8_3 = 7$

9) $5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$
$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

10) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$
$8x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -4$
$3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2$

Método alterno para invertir matrices

Además del método expuesto anteriormente, se puede encontrar la inversa de una matriz mediante el uso de determinantes. Para esto se calculan los cofactores c_{ij} de la matriz y el determinante. La matriz de cofactores de A se define como:

$C = (c_{ij})$

y con ella se define también la matriz adjunta de A, que es la transpuesta de la matriz de cofactores de A:

$\text{adj } A = C^t = (c_{ji})$.

Con la adjunta y el determinante se calcula la matriz inversa:

$A^{-1} = \text{adj } A/\det A$

Nótese que si $\det A = 0$, no hay inversa, esto es, la matriz es singular.

Ejemplo:

Hallar la inversa de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Primero calculamos los cofactores:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ c_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7,\ c_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-8),\ c_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14,\ c_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9,$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ c_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ c_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Con esto tenemos que la matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 8 & 14 & -9 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

y su transpuesta:

$$C^t = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -7 \\ -7 & 14 & -7 \\ 4 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz original lo calculamos con los cofactores del primer renglón calculados antes:

det M = 5(-2) - (7) + 6(4) = 7

Con esto, la matriz inversa es:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -7/7 \\ -7/7 & 14/7 & -7/7 \\ 4/7 & -9/7 & 7/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix}$$

que se puede comprobar que es correcta al multiplicar por M:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/7-1+24/7 & 40/7+2-54/7 & -5-1+6 \\ -6/7-2+20/7 & 24/7+4-45/7 & -3-2+5 \\ -2/7-2+16/7 & 8/7+4-36/7 & -1-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4/7 & -9/7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/7+24/7-1 & -2/7+16/7-2 & -12/7+40/7-4 \\ -5+6-1 & -1+4-2 & -6+4-2 \\ 20/7-27/7+1 & 4/7-18/7+2 & 24/7-45/7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual confirmamos que en efecto se trata de la inversa.

Ejercicios 1.7:

Encontrar las inversas de las matrices dadas usando determinantes:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Vectores, rectas y planos

2.1 Vectores

Un vector es una herramienta matemática que tiene como propiedades una magnitud y una dirección. En este sentido es diferente de otras cantidades que sólo constan de magnitud, a las que llamamos escalares. Para caracterizar a un vector es necesario especificar un escalar que nos dé su magnitud y un ángulo que nos dé su dirección. Gráficamente los vectores se representan por medio de flechas cuyas longitudes son proporcionales a sus respectivas magnitudes. La punta de la flecha se llama punto inicial y la cola es el punto final.

Resulta cómodo referir los vectores a un sistema de coordenadas cartesiano, por lo cual la magnitud de un vector se mide de acuerdo al sistema de unidades que se usa en dicho sistema, mientras que para la dirección se mide el ángulo que hay entre el vector y la parte positiva del eje de las abscisas o eje x, habiendo ubicado el punto inicial en el origen del sistema.

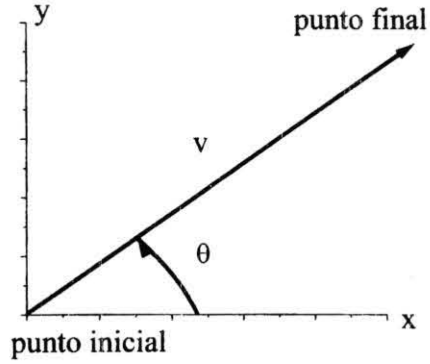


Figura 2.1. Representación gráfica de un vector.

Formas de expresar vectores

Para distinguir los vectores de las cantidades que no lo son se utilizan letras negritas. Especificar un vector requiere dar una magnitud y un ángulo, lo que se expresa como:

$\mathbf{v} = v \angle\theta$,

siendo v la magnitud del vector (a veces llamada módulo, y simbolizada como $|\mathbf{v}|$) y θ el ángulo que da su dirección. Es importante notar que el ángulo no es único, sino que se puede especificar de formas diferentes dado que a un ángulo se le pueden sumar (o restar) múltiplos de 360°.

Ejemplo:

El vector $\mathbf{v} = 4\angle 45°$ también se puede representar como $\mathbf{v} = 4\angle -315°$, o como $\mathbf{v} = 4\angle 405°$, etc.

Operaciones vectoriales

Para los vectores se definen ciertas operaciones que no coinciden con las operaciones con escalares, sino que se deben realizar en forma geométrica. Para esto es necesario utilizar ciertos conceptos de la trigonometría.

Suma

La suma de dos vectores es un nuevo vector que se construye de la siguiente manera: si se ubica al primer vector con el punto inicial en el origen, en el punto final se colocará el punto final del segundo vector. El vector suma (o vector resultante) tendrá como punto inicial el origen y el punto final se coloca en el mismo lugar que el punto final del segundo vector. Esto se muestra en la figura siguiente.

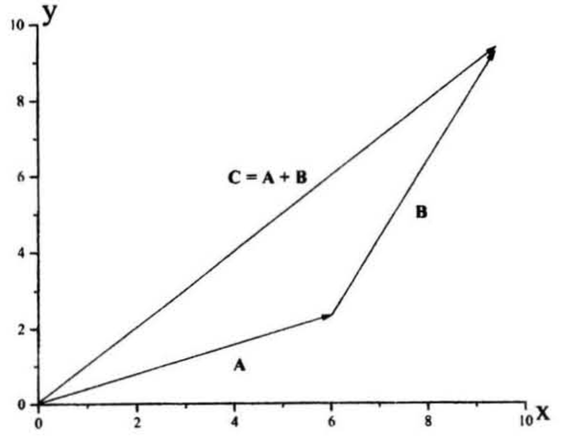


Figura 1.2. Suma de dos vectores.

Para encontrar la magnitud y dirección del vector suma se utilizan las relaciones trigonométricas necesarias.

Ejemplo:

Sean los vectores $\mathbf{a} = 5\angle 30°$, $\mathbf{b} = 4\angle 60°$. Obtener la suma, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Solución:

Los vectores tienen la configuración mostrada en la figura. Las características del vector suma se obtienen como sigue: la magnitud de **c** se obtiene de la ley de los cosenos aplicada al lado c del triángulo dado. Nótese que el ángulo $\theta = 30° + \alpha$ es el que caracteriza al vector y por lo tanto es el que hay que encontrar finalmente.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

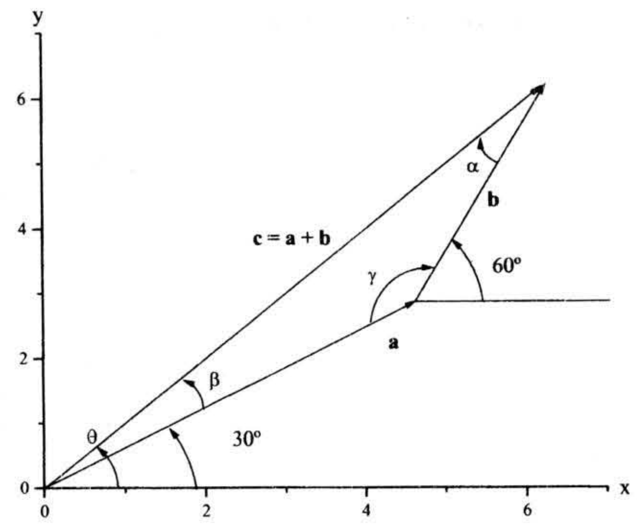


Figura 2.3. Ángulos que intervienen al sumar vectores.

De la figura, vemos que el ángulo γ es la suma de el suplemento de 60° más 30° por ser ángulo correspondiente con el ángulo de **a**. Entonces:

$$c = (5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 150°)^{1/2} = 8.7$$

Para calcular β se usa la ley de los senos, aplicada al ángulo γ y a los lados a y c (que ya se calculó):

$$\frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c} \Rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{4} = \frac{\text{sen}150°}{8.7}$$

$$\text{sen}\beta = 0.2299 \Rightarrow \beta = 13.3°$$

entonces $\theta = 43.3°$

$\mathbf{c} = 8.7\angle 43.3°$

Multiplicación de un vector por un escalar

Cuando multiplicamos un vector por un escalar, pueden pasar varias cosas, dependiendo del valor de la constante. Sea **v** un vector y k una constante. El vector **u** = k**v** cambiará de la siguiente manera:

Si $k > 1$, el vector se "estira" k unidades en la misma dirección

Si $0 < k < 1$, el vector se "encoge" en la misma dirección

Si $k < -1$, el vector se estira y apunta en la dirección opuesta

Si -1 < k < 0, el vector se encoge y apunta en dirección opuesta

Si k = -1, el vector no cambia de magnitud, sólo apunta en dirección opuesta

Si k = 1, el vector no cambia, queda igual

Ejemplo:

Sea v = 6∠40°, hallar -0.5v y 3v.

Solución:

Para hallar -0.5v multiplicamos por 0.5 magnitud y le sumamos 180° al ángulo:

-v = 3∠220°

Para 3v sólo multiplicamos por 3 a la magnitud y dejamos igual al ángulo:

3v = 18∠40°

Descomposición de vectores

Así como se pueden sumar dos vectores para obtener un tercero, también se puede descomponer un vector en dos (o más) vectores. En particular nos interesará descomponer en vectores que sean paralelos a los ejes coordenados. Para ello usamos las relaciones de la trigonometría entre cada una de las componentes.

Para un vector en el primer cuadrante tendremos una componente en la dirección positiva del eje x y otra en la del eje y; cuyas longitudes son la abscisa y la ordenada del punto final, respectivamente. Se calcula la longitud de cada componente, x, y multiplicando la magnitud del vector por el coseno y el seno del ángulo menor con el eje x, respectivamente (ver figura).

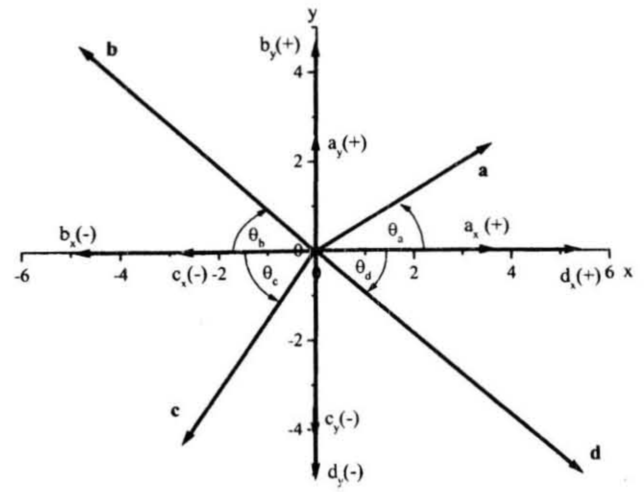


Figura 2.4. Componentes cartesianas de vectores.

Los signos en cada caso se asignan según el sentido en que quede c[illegible] en los respectivos ejes. Para el primer cuadrante ambas componentes son pos[illegible] gundo cuadrante la componente x es negativa y la componente y es positiva, para el [illegible] drante ambas son negativas y para el cuarto x es positiva y y es negativa. Todo esto se resume en el diagrama.

Ejemplo:

Encontrar las componentes de los vectores siguientes: **v** = 7∠30°, **w** = 8∠-35°, **u** = 5∠225°.

Solución:

Las componentes de **v** son: $v_x = 7\cos30$, $v_y = 7\text{sen}30$

Las de **w** son: $w_x = 8\cos35$, $w_y = -8\text{sen}35$

Las de **u** son: $u_x = -5\cos45$, $u_y = -5\text{sen}45$.

Nótese que en **w** se usó el valor absoluto del ángulo y en **u** se usó el ángulo más pequeño entre el eje x y el vector.

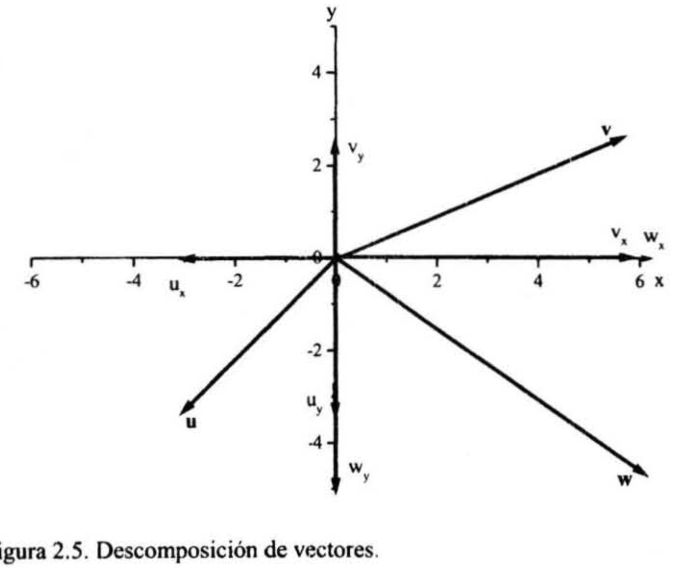


Figura 2.5. Descomposición de vectores.

Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es uno. Cualquier vector se puede expresar como el producto de un vector unitario en la misma dirección por su magnitud. También se puede obtener un vector unitario en la dirección de un vector dividiéndolo entre su magnitud, a esto se le llama normalización. El vector unitario en la dirección de **a** se designa por $\hat{\mathbf{a}}$.

En particular será de gran importancia considerar los vectores unitarios que apuntan en la misma dirección de los ejes de coordenadas. Como estos se usan abundantemente, se les da símbolos especiales: el vector unitario en la dirección del eje x se designa por **i** y el unitario en dirección y se designa por **j**. Cualquier vector se puede expresar como una suma de múltiplos de **i** y **j**, para lo cual es necesario obtener la magnitud de sus componentes en cada dirección y multiplicarlas por los unitarios de cada dirección. Cuando se suman múltiplos de vectores se dice que se está haciendo una *combinación lineal*. Así pues, todo vector **A** se puede expresar como combinación lineal de **i** y **j**: $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$. Es frecuente que los vectores se expresen también como si fueran coordenadas: $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$, que no es sino una manera alterna de expresar lo mismo que antes.

Ejemplo:

Expresar los siguientes vectores con ayuda de los unitarios **i** y **j**:

$\mathbf{A} = 8\angle 50°$, $\mathbf{B} = 15\angle 150°$, $\mathbf{C} = 12\angle 250°$, $\mathbf{D} = 9\angle 350°$

Solución:

$A_x = 8\cos 50° = 5.1423$, $A_y = 8\text{sen}50° = 6.1284 \Rightarrow \mathbf{A} = 5.1423\,\mathbf{i} + 6.1284\,\mathbf{j}$.

$B_x = -15\cos 30° = -12.9904$, $B_y = 15\text{sen}30° = 7.5 \Rightarrow \mathbf{B} = -12.9904\,\mathbf{i} + 7.5\,\mathbf{j}$.

$C_x = -12\cos 70° = -4.1042$, $C_y = -12\text{sen}70° = -11.2763 \Rightarrow \mathbf{C} = -4.1042\,\mathbf{i} - 11.2763\,\mathbf{j}$.

$D_x = 9\cos 10° = 8.8632$, $D_y = -9\text{sen}10° = -1.5628 \Rightarrow \mathbf{D} = 8.8632\,\mathbf{i} - 1.5628\,\mathbf{j}$.

El uso de los vectores unitarios **i** y **j** nos simplifica enormemente las operaciones de suma y producto por un escalar, puesto que no hay que operar con ángulos. Para la suma sólo se suman los coeficientes de **i** y de **j** para cada vector, y para el producto por un escalar se multiplican los coeficientes de cada componente por el escalar.

Ejemplo:

Para los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ realizar las operaciones indicadas:

a) $2\mathbf{u}$ b) $5\mathbf{v}$ c) $-3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$

Solución:

a) $2\mathbf{u} = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

b) $5\mathbf{v} = 5(-5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) = -25\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$.

c) $-3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} = -3(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + 4(-5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) = -29\mathbf{i} + 38\mathbf{j}$.

Para hallar la magnitud de un vector dado como combinación lineal de **i** y **j**, se usa el teorema de Pitágoras: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Para hallar el ángulo que da su dirección se usa la definición de la tangente trigonométrica: $\text{tg}\theta = v_y/v_x$.

Ejercicios 2.1:

Encontrar los valores de x, y, z:

1) (-21, 23) - (x, 6) = (-25, y)

2) 3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (x, y, z)

3) (a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + 0.5(x, y, z)

4) (2, 3, 5) - 4**i** + 3**j** = (x, y, z)

5) 80(0.3, 2, 0) = x**i** + y**j**+ z**k**

6) (3, y, 5) + (x, 2, -6) = (2, 3, z)

7) Sean **u** = (1,2,3), **v** = (2,-3,1) y **w** = (3,2,-1). Hallar:

a) **u** - **w**, b) 3**v** + 7**w**, c) -**w** + **v**, d) 3(**u** - 7**v**), e) -3**v** - 8**w**, f) 2**v** - (**u** + **w**), g) resolver para **x**: 2**u** - **v** + **x** = 7**x** + **w**, h) resolver para c_1, c_2, c_3: c_1**u** + c_2**v** + c_3**w** = (6,14,-2).

8) Resolver para c_1, c_2, c_3:

a) $c_1(2,7,8) + c_2(1,-1,3) + c_3(3,6,11) = (0,0,0)$

b) $c_1(1,2,-3) + c_2(5,7,1) + c_3(6,9,-2) = (4,5,0)$

9) Los vectores de posición de los puntos P y Q son, respectivamente, $\mathbf{r}_1$ = 2**i** + 3**j** - **k** y $\mathbf{r}_2$ = 4**i** - 3**j** + 2**k**. Determinar el vector PQ en función de **i**,**j**,**k** y hallar su magnitud.

10) Siendo **A** = 3**i** - **j** - 4**k**, **B** = -2**i** + 4**j** - 3**k**, **C** = **i** + 2**j** - **k**, hallar:

a) 2**A** - **B** + 3**C** b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$ c) $|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|$

11) Dadas dos coordenadas de un vector **a**, x = 4, y = -12, hallar la tercera, sabiendo que $|\mathbf{a}|$ = 13.

Producto interno de vectores

En los vectores hay dos clases de productos: el interno y el externo. Para cada uno de ellos, se obtienen diferentes cantidades, en el producto interno se obtiene un escalar, mientras que en el producto externo se obtiene un vector; por esta razón también se les llama producto escalar y producto vectorial, respectivamente. El producto escalar se simboliza con un punto entre los vectores, mientras que el producto vectorial se simboliza con una cruz. Por ello también se usan los nombres de producto punto y producto cruz para designarlos.

El producto interno de dos vectores **A** y **B** se define como el número que resulta al efectuar el producto de sus magnitudes por el coseno del menor ángulo entre ellos. En forma simbólica:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$.

Ejemplo:

Hallar el producto interno entre los vectores $\mathbf{p} = 12\angle 28°$ y $\mathbf{q} = 8\angle 72°$.

Solución:

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = (12)(8)\cos 44° = 69.06$

Es importante observar lo que sucede con el producto punto entre los vectores unitarios **i** y **j**:

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$

$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 0° = 1$

$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 90° = 0.$

La primera y la última operaciones nos muestran una propiedad fundamental del producto punto: que es conmutativo. Esto vale en general para cualquier par de vectores, puesto que en su definición sólo intervienen productos de números reales, que como sabemos, cumplen con la propiedad conmutativa.

Para hallar el producto punto de dos vectores dados como combinación lineal de **i** y **j** se multiplican los coeficientes de **i** entre sí y lo mismo con los coeficientes de **j** y se suma todo. Esto a veces se expresa en forma matricial escribiendo el primer vector como una matriz de 1 × 2 donde cada elemento es una componente del vector, mientras que el segundo vector se expresa como una matriz de 2 × 1, en la forma siguiente:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_x & A_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = A_xB_x + A_yB_y.$$

Ejemplo:

Hallar el producto punto de los vectores:

$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Solución:

De la regla dada encontramos que:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (6\mathbf{i} - 9\mathbf{j})\cdot(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = (6)(9) + (-9)(2) = 36.$

También se puede hacer usando matrices:

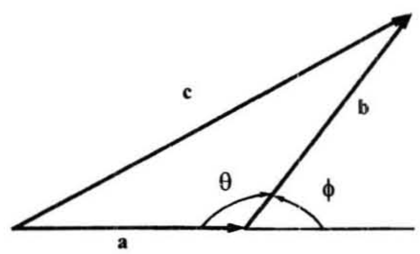
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (6)(4) + (-9)(2) = 36.$$

Ejemplo:

Demostrar la ley de los cosenos.

Solución:

Sean los vectores **a** y **b**, como se muestra en la figura:



De aquí vemos que

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$,

y que al elevar al cuadrado:

$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2$

pero sabemos que:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi = -ab\cos\theta$

tomando los valores numéricos se tiene que:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

que es la ley de los cosenos.

La proyección de un vector **a** sobre otro **b** es una generalización de la descomposición de vectores en el plano cartesiano: si se descompone al vector **a** en una componente paralela a **b** y otra componente perpendicular, a la magnitud de la componente paralela se le llama proyección de **a** en la dirección de **b**. La magnitud de este vector se puede calcular con:

$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = a\cos\phi = \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{b}}$

y la dirección será la del vector será la del vector **b**.

Ejemplo:

Calcular la proyección del vector $\mathbf{a} = (2,5,-1)$ sobre el vector $\mathbf{b} = (3,5,-2)$.

Solución:

El vector unitario en la dirección de **b** es el vector **b** entre su magnitud b, que es:

$$b = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2} = 6.16$$

$$\hat{\mathbf{b}} = (0.48, 0.81, 0.32)$$

y la magnitud se obtiene haciendo el producto punto indicado:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}} = (2)(0.48) + (5)(0.81) + (-1)(0.32) = 4.69$$

con lo que

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (2.25, 3.8, 1.5)$$

Ejemplo:

Demostrar que los siguientes vectores son perpendiculares: **A** = **i** + 4**j** + 3**k**, **B** = 4**i** + 2**j** - 4**k**.

Solución:

Si al hacer el producto punto obtenemos cero, es porque los vectores son perpendiculares. El producto punto es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1)(4) + (4)(2) + (3)(-4) = 0$$

lo que nos asegura que los vectores son perpendiculares.

Ejercicios 2.2:

1) Hallar el ángulo formado por los vectores **A** = 2**i** + 2**j** – **k** y **B** = 6**i** – 3**j** + 2**k**.

2) Los vectores **a** y **b** forman un ángulo de 120º. Sabiendo que a = 3, b = 4, calcular a) **a**·**b**, b) **a**·**a**, c) **b**·**b**, d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$, e) (3**a** - 2**b**)·(**a** + 2**b**), f) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$, g) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$.

3) Hallar el valor de a tal que los vectores **A** = 2**i** + a**j** + **k** y **B** = 4**i** – 2**j** – 2**k** sean perpendiculares.

4) Demostrar que los vectores **A** = 3**i** – 2**j** + **k**, **B** = **i** – 3**j** + 5**k**, **C** = 2**i** + **j** - 4**k** forman un triángulo rectángulo.

5) Hallar los ángulos del vector **A** = 3**i** – 6**j** + 2**k** con los ejes coordenados.

6) Hallar la proyección del vector **A** = **i** – 2**j** + **k** según la dirección del vector **B** = 4**i** – 4**j** + 7**k**.

7) Los vectores **a** y **b** son perpendiculares entre sí y $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 12$. Determinar $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

8) Los vectores **a** y **b** forman un ángulo $\phi = 60^\circ$, sabiendo que $|\mathbf{a}| = 5$ y $|\mathbf{b}| = 8$, determinar $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

9) Los vectores **a** y **b** forman un ángulo $\phi = 120^\circ$, sabiendo que $|\mathbf{a}| = 3$ y $|\mathbf{b}| = 5$, determinar $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

10) Calcular el producto punto de los siguientes vectores y hallar el ángulo entre ellos:

a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 10$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$, $\theta = 57^\circ$

b) $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\theta = 90^\circ$

c) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{j}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 4$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -6\mathbf{k}$, $\theta = 32.3^\circ$

d) $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\theta = 90^\circ$

e) $\mathbf{A} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\theta = 11.4^\circ$

11) Hallar el producto punto de los vectores (2,3,4) y (5,6,-7) y hallar el ángulo entre ellos.

12) Los vectores **a** y **b** forman un ángulo $\phi = 120^\circ$, sabiendo que $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = 4$, calcular:

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ R: -6

b) $\mathbf{a}^2$ R: 9

c) $\mathbf{b}^2$ R: 16

d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$ R: 13

e) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ R: -61

f) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$ R: 37

g) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$ R: 73

13) Los vectores **a** y **b** son perpendiculares entre sí, el vector **c** forma con ellos ángulos iguales a 60°, sabiendo que $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$, calcular:

a) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$ R: -62

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$ R: 162

c) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})^2$ R: 373

14) Determinar los valores de α y β para que los siguientes vectores sean paralelos: $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

15) Encontrar los valores de α que hagan que los siguientes vectores sean perpendiculares: $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$.

16) Se dan tres vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Hallar el vector $\mathbf{x}$ que satisface las condiciones: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b} = -11$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 20$.

17) Calcular la proyección del vector $\mathbf{a} = (5,2,5)$ sobre el eje del vector $\mathbf{b} = (2,-1,2)$.

18) Se dan tres vectores: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. Hallar $\mathrm{proy}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

19) Dados los vectores: $\mathbf{a} = (1,-3,4)$, $\mathbf{b} = (3,-4,2)$ y $\mathbf{c} = (-1,1,4)$. Calcular la magnitud de $\mathrm{proy}_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}\mathbf{a}$.

20) Dados: $\mathbf{a} = (-2,1,1)$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Calcular $\mathrm{proy}_{\mathbf{c}}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

Producto externo de vectores

El producto externo de dos vectores es un vector cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los vectores involucrados por el seno del ángulo más pequeño entre ellos. Su dirección es perpendicular a ambos vectores, lo cual implica que no puede estar en el plano, sino que queda en dirección perpendicular al plano que forman los vectores dados. Esto permite dos direcciones diferentes, por lo cual se establece el siguiente criterio para asignar la apropiada: si hacemos girar un tornillo en el sentido de giro del primer vector al segundo, el tornillo va hacia uno u otro sentido; este sentido es el que se asignará al vector. Por ejemplo si el primer vector está en dirección de **i** y el segundo en dirección de **j**, el vector que resulta al hacer el producto cruz va en el sentido en que gira el tornillo, que es hacia afuera. O sea que el vector producto sale del papel. Esto se indica gráficamente haciendo un círculo con un punto enmedio, representando la punta de la flecha. Si el vector entrara, se pondría un círculo con una cruz, representando la cola de la flecha. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura.

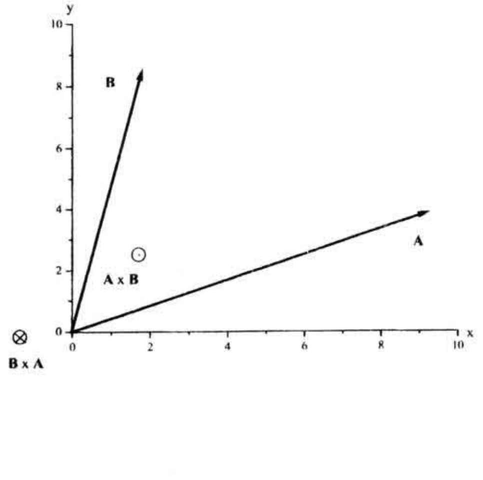


Figura 2.9. Producto externo de vectores.

Simbólicamente, el producto cruz se representa así:

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\text{sen}\theta\ \hat{\mathbf{n}}$

con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario en la dirección dada por la regla del tornillo. También se da la dirección con una regla llamada de la mano derecha, que consiste en colocar perpendicularmente los dedos índice, medio y pulgar perpendicularmente; si el primer vector está representado con el dedo índice y el segundo con el dedo medio, el producto cruz apuntará hacia donde apunta el dedo pulgar.

Ejemplo:

Hallar el producto cruz de los vectores:

$\mathbf{A} = 8\angle\text{-}30°$, $\mathbf{B} = 7\angle 65°$.

Solución:

De la regla dada encontramos que:

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (8)(6)\text{sen}95°\ \hat{\mathbf{n}} = 47.82\ \hat{\mathbf{n}}$.

El vector $\hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia afuera del papel.

Es importante tomar nota de lo que pasa con el producto cruz de los vectores unitarios **i** y **j**. Puesto que el producto punto siempre va perpendicular al plano, es necesario definir un nuevo vector unitario que vaya en dirección perpendicular al plano en que están los vectores **i** y **j**. Al nuevo vector se le llama **k**, y apunta hacia afuera del papel, en una dirección a la que se llama z, que define un espacio de tres dimensiones. De este modo, el producto cruz de los vectores unitarios nos da los siguientes resultados:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = (1)(1)\text{sen}0° = 0$

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (1)(1)\text{sen}90°\ \mathbf{k} = \mathbf{k}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = (1)(1)\text{sen } 90°\ (\mathbf{-j}) = \mathbf{-j}$

$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = (1)(1)\text{sen}90°\ (\mathbf{-k}) = \mathbf{-k}$

$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = (1)(1)\text{sen}0° = 0$

$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = (1)(1)\text{sen}90°\ \mathbf{i} = \mathbf{i}$

$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = (1)(1)\text{sen}90°\ \mathbf{j} = \mathbf{j}$

$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = (1)(1)\text{sen}90°\ (\mathbf{-i}) = \mathbf{-i}$

$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = (1)(1)\text{sen}0° = 0$

Nótese que el producto cruz no es conmutativo, sino que al cambiar el orden de los vectores también cambia el signo, por lo que se dice que el producto cruz es anticonmutativo. De este modo, es posible efectuar el producto cruz de dos vectores dados como combinación de **i**, **j** y **k** de modo similar a como se hace el producto de dos trinomios, pero aquí haciendo el producto cruz de los vectores unitarios según lo indicado arriba, teniendo cuidado de guardar correctamente el orden de los vectores para preservar los signos. La magnitud del producto cruz es igual al área del paralelogramo que se forma con los vectores involucrados.

Hay una regla fácil de recordar para efectuar el producto cruz, que consiste en utilizar el determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Hallar el producto cruz de los vectores:

$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Solución:

De la regla dada encontramos que:

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (6\mathbf{i} - 9\mathbf{j})\times(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = (6)(9)(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + (6)(2)(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + (-9)(4)(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + (-9)(2)(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) = 12\mathbf{k} + 36\mathbf{k} = 48\mathbf{k}$.

También se puede hacer usando el determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\{(-9)(0) - (2)(0)\} - \mathbf{j}\{(6)(0) - (4)(0)\} + \mathbf{k}\{(6)(2) - (4)(-9)\} = 48\mathbf{k}$$

Ejemplo:

Demostrar la ley de los senos.

Solución:

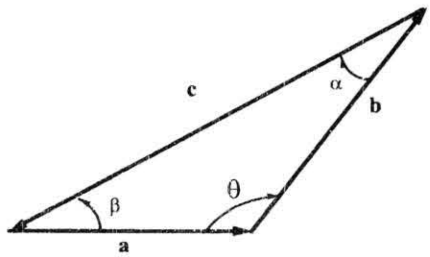
Sean los vectores **a** y **b**, como se muestra en la figura de la siguiente página. De aquí vemos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Si a ambos miembros de esta igualdad los multiplicamos por $\mathbf{a}\times$, nos da:

$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times 0$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

que al tomar la magnitud nos da:

$ab\ \mathrm{sen}\theta = ac\ \mathrm{sen}\beta$



Si se multiplica ahora por la suma por $\mathbf{b}\times$, se obtendrá análogamente:

$$ab\ \text{sen}\theta = bc\ \text{sen}\alpha$$

con lo cual podemos escribir la triple igualdad:

$$ab\ \text{sen}\theta = ac\ \text{sen}\beta = bc\ \text{sen}\alpha$$

que al dividir entre abc nos da la ley de los senos:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\theta}{c}\ .$$

Ejemplo:

Demostrar que: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

Solución:

Supongamos que los vectores dados tienen las componentes:

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$.

Al hacer el producto cruz entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ obtenemos:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(b_yc_z - b_zc_y) + \mathbf{j}(b_zc_x - b_xc_z) + \mathbf{k}(b_xc_y - b_yc_x) = \mathbf{d}$$

y al multiplicar por $\mathbf{a}\times\mathbf{d}$ nos da:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_yd_z - a_zd_y) + \mathbf{j}(a_zd_x - a_xd_z) + \mathbf{k}(a_xd_y - a_yd_x) = \mathbf{i}[a_y(b_xc_y - b_yc_x) + a_z(b_xc_z - b_zc_x)] + \mathbf{j}[a_z(b_yc_z - b_zc_y) - a_x(b_xc_y - b_yc_x)] + \mathbf{k}[a_x(b_zc_x - b_xc_z) - a_y(b_yc_z - b_zc_y)] = \mathbf{i}(a_yb_xc_y - a_yb_yc_x + a_zb_xc_z - a_zb_zc_x) + \mathbf{j}(a_zb_yc_z - a_zb_zc_y - a_xb_xc_y + a_xb_yc_x) + \mathbf{k}(a_xb_zc_x - a_xb_xc_z - a_yb_yc_z + a_yb_zc_y).$$

Si ahora desarrollamos el segundo miembro de la ecuación inicial, obtendremos:

$\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})[(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k})] - (c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k})[(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})] = (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z) - (c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k})(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) = \mathbf{i}(a_xb_xc_x + a_yb_xc_y + a_zb_xc_z - a_xb_xc_x - a_yb_yc_x - a_zb_zc_x) + \mathbf{j}(a_xb_yc_x + a_yb_yc_y + a_zb_yc_z - a_xb_xc_y - a_yb_yc_y - a_zb_zc_y) + \mathbf{k}(a_xb_zc_x + a_yb_zc_y + a_zb_zc_z - a_xb_xc_z - a_yb_yc_z - a_zb_zc_z) = \mathbf{i}(a_yb_xc_y + a_zb_xc_z - a_yb_yc_x - a_zb_zc_x) + \mathbf{j}(a_xb_yc_x + a_zb_yc_z - a_xb_xc_y - a_zb_zc_y) + \mathbf{k}(a_xb_zc_x + a_yb_zc_y - a_xb_xc_z - a_yb_yc_z)$,

que es precisamente lo mismo que encontramos en el triple producto cruz dado arriba.

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre la diagonal interna de un cubo y una de sus aristas.

Solución:

Si hacemos tres lados del cubo (que miden a unidades) coincidan con los ejes de coordenadas, la diagonal estará dada por el vector $\mathbf{d} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$, con lo cual podemos calcular el ángulo haciendo el producto punto con cualquiera de los vectores que dan sus aristas vecinas, $a\mathbf{i}$, $a\mathbf{j}$ o $a\mathbf{k}$:

$a\mathbf{i}\cdot\mathbf{d} = a\mathbf{i}\cdot a(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = a^2$,

por otro lado

$a\mathbf{i}\cdot\mathbf{d} = ad\cos\theta = \sqrt{3}\,a^2\cos\theta$

igualando estas expresiones se obtiene:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

con lo cual obtenemos $\theta = 54.7^{\circ}$.

Ejercicios 2.3:

1) Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, hallar a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

2) Si $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ hallar a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$, b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

3) Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman un ángulo $\phi = 30^{\circ}$. Sabiendo que $\mathbf{a} = 6$, $\mathbf{b} = 5$, calcular $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

4) Sean $\mathbf{u} = (1,-3,2)$, $\mathbf{v} = (1,1,0)$ y $\mathbf{w} = (2,2,-4)$. Encontrar:

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, b) $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, c) $|-2\mathbf{u}| + 2|\mathbf{u}|$, d) $|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}|$, e) $\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$, f) $|\mathbf{w}/|\mathbf{w}||$.

5) Resolver para k: $|k\mathbf{v}| = 3$, $\mathbf{v} = (1,2,4)$

6) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son (1,3,2),(2,-1,1) y (1,2,3).

7) Calcular el producto cruz de los siguientes vectores y hallar el ángulo entre ellos:

a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 10$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$

b) $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

c) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{j}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 4$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -6\mathbf{k}$

d) $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

e) $\mathbf{A} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ R: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

8) Hallar el ángulo entre $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} -4\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k}$.

9) Sean $\mathbf{u} = (2,-1,3)$, $\mathbf{v} = (0,1,7)$ y $\mathbf{w} = (1,4,5)$. Calcular: a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$, f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$.

10) Para los siguientes pares de vectores hallar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y el ángulo entre ellos:

a) $\mathbf{u} = (1,-3,7)$, $\mathbf{v} = (8,-2,-2)$ b) $\mathbf{u} = (-3,-1,2)$, $\mathbf{v} = (4,2,-5)$ c) $\mathbf{u} = (7,3,5)$, $\mathbf{v} = (-8,4,2)$

d) $\mathbf{u} = (6,1,3)$, $\mathbf{v} = (4,0,-6)$ e) $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,0,0)$ f) $\mathbf{u} = (4,1,6)$, $\mathbf{v} = (-3,0,2)$

g) $\mathbf{u} = (-7,1,3)$, $\mathbf{v} = (5,0,1)$ h) $\mathbf{u} = (0,0,1)$, $\mathbf{v} = (8,3,4)$ i) $\mathbf{u} = (2,-3,5)$, $\mathbf{v} = (-1,9,0)$

j) $\mathbf{u} = (3,-4,2)$, $\mathbf{v} = (-2,-3,-7)$

11) Se da $\mathbf{a} = 10$, $\mathbf{b} = 2$ y $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 72$. Calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

12) Se da $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = 26$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 12$. Calcular $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

13) Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = 2$, calcular:

a) $|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$

b) $|(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})|$

14) Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman un ángulo $\phi = 120°$. Sabiendo que $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = 2$, calcular:

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2$

b) $[(2\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})]^2$

c) $[(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a} - \mathbf{b})]^2$

15) Dados los vectores $\mathbf{a} = (3,-1,-2)$ y $\mathbf{b} = (1,2,-1)$, hallar las coordenadas de los productos vectoriales:

a) **a** × **b**

b) (2**a** + **b**) × **b**

c) (2**a** - **b**) × (2**a** + **b**)

16) Se dan los puntos a = (1,2,0), b = (3,0,-3) y c = (5,2,6). Calcular el área del triángulo abc.

17) Se dan los vectores **a** = (2,-3,1), **b** = (-3,1,2) y **c** = (1,2,3). Calcular (**a** × **b**) × **c** y **a** × (**b** × **c**).

18) El vector **c** es perpendicular a los vectores **a** y **b**, el ángulo formado por **a** y **b** es igual a 30º. Sabiendo que **a** = 6, **b** = 3, **c** = 3, calcular **a**·(**b** × **c**).

2.2 Rectas en el plano

Ya se ha visto que una ecuación de la forma Ax + By + C = 0 describe una recta de pendiente -A/B y ordenada al origen -C/B. De hecho es más frecuente escribirla en la forma y = mx + b, llamada ecuación pendiente ordenada al origen. Se puede encontrar fácilmente la ecuación de una recta conociendo dos puntos por los que pasa (x_1,y_1) y (x_2,y_2), ya sea encontrando la pendiente con la fórmula para la pendiente o por medio del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Otra forma de describir una recta es usando un vector paralelo a la recta y un punto por el que pasa, como se verá en la siguiente sección.

Ecuación vectorial de una recta

Si se tiene un punto P_0 de una recta, y el vector **v** paralelo a ella (llamado a veces vector director), se puede dar su ecuación como:

$P = P_0 + t\mathbf{v}$,

en la que t es cualquier número real. Más explícitamente se puede escribir como:

$(x,y) = (x_0,y_0) + t(v_x,v_y)$

Si tenemos la ecuación de una recta en la forma vectorial, se puede pasar a la forma punto pendiente haciendo $m = v_y/v_x$ y $b = y_0 - mx_0$.

Cuando nos dan dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), podemos construir la ecuación vectorial de la recta que pasa por esos dos puntos tomando alguno de ellos como P_0 y haciendo $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos (2,-1) y (5,7).

Solución:

Sea $P_0 = (2,-1)$. El vector director será $\mathbf{v} = (5 - 2)\mathbf{i} + (7 - (-1))\mathbf{j} = (3,8)$. Entonces la ecuación es:

$(x,y) = (2,-1) + t(3,8)$

Para esta misma recta la ecuación pendiente ordenada al origen la encontramos haciendo:

$m = 8/3$, $b = -1 - (8/3)2 = -19/3$

con lo que la ecuación nos da:

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{-19}{3}$$

Ángulos entre rectas

Para dos rectas con ecuaciones dadas en forma pendiente ordenada al origen y pendientes m_1 y m_2, se puede encontrar el ángulo más pequeño θ entre ellas con la fórmula:

$$\mathrm{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

De esta fórmula se desprende que si dos rectas son paralelas, $m_2 = m_1$, si son perpendiculares $m_2 = -1/m_1$. La fórmula anterior es un poco difícil de aplicar y más de recordar, pero si se tienen las ecuaciones en forma vectorial es mucho más fácil hallar el ángulo entre las rectas haciendo el producto punto o el producto cruz y despejando el ángulo. Esto se puede representar con las fórmulas siguientes:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}, \ \mathrm{sen}\theta = \frac{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$$

Para dos rectas con ecuaciones vectoriales paralelas, el producto cruz de sus vectores directores da cero, y para rectas perpendiculares el producto punto da cero.

Ejemplo:

Encontrar el ángulo que forman el siguiente par de rectas:

$y = 5x - 2$, $y = -2x + 4$

Solución:

Sustituyendo en la fórmula:

$$tg\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-2-5}{1+(-2)(5)}\right| = 7/9$$

con lo cual, $\theta = 37.87^\circ$

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre las rectas:

$(x,y) = (2,3) + (3,-1)t$, $(x,y) = (-1,-1) + (-2,-1)t$

Solución:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{(3,-1)\cdot(-2,-1)}{\left|\sqrt{3^2+(-1)^2}\right|\left|\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}\right|} = -0.7071$$

Por lo tanto, $\theta = 135^\circ$.

Distancia de un punto a una recta

Para una recta de la que se tiene su ecuación general $Ax + By + C = 0$, la distancia de un punto (x_1,y_1) hacia ella viene dada por la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Si se tiene la ecuación de la recta en forma vectorial, se puede encontrar la distancia del punto P_{ext} a la recta encontrando el vector diferencia entre P_0 y P_{ext} , y luego la magnitud de la proyección de él con el vector que va de la recta a P_{ext}, lo que se hace usando el producto punto entre el vector **v** de la recta normalizado y $(P_0 - P_{ext})$. Esto se puede resumir con la siguiente fórmula:

$$d = |(P_0 - P_{ext})\cdot \hat{\mathbf{v}}|$$

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto $(2,1)$ a la recta $y = -2x + 3$

Solución:

La recta tiene la forma general:

$2x + y - 3 = 0$,

con lo cual se tendrá en la fórmula:

$$d = \frac{|(2)(2)+(1)(1)+(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0.89$$

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto (4,5) a la recta (x,y) = (2,-1) + t(1,-1)

Solución:

$(P_0 - P_{ext}) = (-2,-6)$

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$(-2,-6)\cdot(1,-1)/\sqrt{2} = (-2+6)/\sqrt{2} = 8/\sqrt{2} = 5.66$

d = 5.66.

2.3 Planos

En el plano, una ecuación lineal genera una recta. Esta es la línea más simple que se puede generar. En el espacio una ecuación lineal genera superficies planas, que son las superficies más simples que se pueden generar en el espacio. La analogía entre rectas y planos lleva a relaciones interesantes que sirven para analizar su comportamiento.

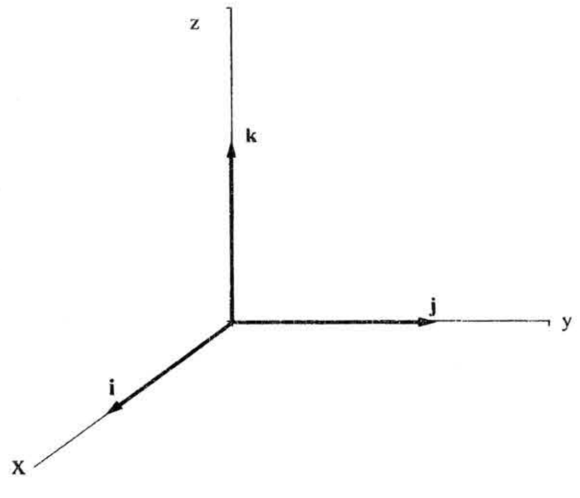


Figura 2.9. El espacio tridimensional.

En este punto debemos decir que aunque el uso de los vectores **i**, **j**, y **k** en las direcciones hacia la derecha, hacia arriba y hacia afuera del papel, respectivamente, es perfectamente claro y consistente, convencionalmente se utilizan del modo siguiente: **i** hacia afuera del papel, **j** hacia la derecha, **k** hacia arriba, según se muestra en la figura. A partir de ahora se utilizará esta convención.

Ecuación punto normal de un plano

En el plano, para dar la ecuación de una recta es suficiente conocer un punto $P_0 = (x_0,y_0)$ y la pendiente m, con lo cual la ecuación es:

$(y - y_0) = m (x - x_0)$.

Para un plano en un espacio también se puede hallar su ecuación al tener un punto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ y su inclinación. Para especificar la inclinación de un plano se puede dar un vector **n** que sea perpendicular a él. A este se le llama su vector normal. La ecuación del plano, donde P es cualquier punto sobre él, es:

$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}) = 0$,

o más explícitamente:

$n_x (x - x_0) + n_y (y - y_0) + n_z (z - z_0) = 0$.

A esta se le llama ecuación punto normal de un plano. Al desarrollar se obtiene:

$ax + by + cz + d = 0$.

Toda ecuación de la forma anterior da un plano cuyo vector normal es:

$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Ejemplo:

Dados dos puntos $M_1 = (3,-1,3)$ y $M_2 = (5,-2,1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $(M_1 - M_2)$.

Solución:

El vector $(M_1 - M_2)$ es $(-2,1,2)$, con lo cual la ecuación es:

$-2(x - 3) + (y + 1) + 2(z - 3) = 0$,

o bien:

$-2x + y + 2z + 1 = 0$.

Ejemplo:

Encontrar el plano generado por los vectores: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución:

Para hallar el vector normal al plano, simplemente calculamos el producto cruz, que nos dará el vector normal del plano buscado:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 23\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y tomamos cualquiera de los dos vectores dados como P_0 y sustituimos en la fórmula:

$23(x - 2) - 7(y - 7) - 3(z + 1) = 0,$

o bien:

$23x - 7y - 3z = 0.$

Ejercicios 2.4:

1) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,1,-1) y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

2) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyo vector normal es $5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$.

3) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1 = (2,-1,3)$ y $M_2 = (3,1,2)$ y es paralelo al vector $\mathbf{a} = (3,-1,4)$.

4) Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

5) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y que pasa por el extremo del vector $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6) Hallar la ecuación del plano determinado por el punto y vector normal dados:

a) (2,6,1), $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ b) (-1,-1,2), $-\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ c) (1,0,0), $\mathbf{k}$ d) (0,0,0), $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

7) Hallar un plano que pase por (2,-7,6) y sea paralelo al plano $5x - 2y + z - 9 = 0$.

8) Encontrar el plano generado por los vectores: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

9) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,1,-1) y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = (1,-2,3)$.

10) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = (5,0,-3)$.

11) Hallar la ecuación del plano que pasa por dos puntos M1 = (1,-1,-2) y M2 = (3,1,1) y es perpendicular al plano $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

12) Dados dos puntos $M_1 = (3,-1,2)$ y $M_2 = (4,-2,-1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector M_1M_2.

13) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1 = (3,4,-5)$ y es paralelo a los dos vectores $\mathbf{a}_1 = (3,1,-1)$ y $\mathbf{a}_2 = (1,-2,1)$.

14) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1 = (2,-1,3)$ y $M_2 = (3,1,2)$ y es paralelo al vector $\mathbf{a} = (3,-1,-4)$.

15) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos: $M_1 = (3,-1,2)$, $M_2 = (4,-1,-1)$ y $M_3 = (2,0,2)$.

16) Determinar las coordenadas de algún vector normal de cada uno de los siguientes planos:

a) $2x - y - 2z + 5 = 0$

b) $x + 5y - z = 0$

c) $3x - 2y - 7 = 0$

d) $5y - 3z = 0$

e) $x + 2 = 0$

f) $y - 3 = 0$

17) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

18) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1 = (3,-2,-7)$ y es paralelo al plano $2x - 3z + 5 = 0$.

19) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

20) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2,-1,1)$ y es perpendicular a los dos planos: $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

Ecuación general de un plano

Toda ecuación de la forma $Ax + By + Cz = 0$ genera un plano. Si se tienen tres puntos (no colineales) de coordenadas (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) y (x_3,y_3,z_3), la ecuación del plano que pasa por ellos se puede encontrar con el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos p = (3,4,2), q = (-1,3,2), r = (-3,-2,5).

Solución:

Sustituyendo en el determinante dado:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -3x - 16y + 18z - 75 = 0.$$

Nótese que también podría hacerse de otro modo: se restan los puntos (q - p) y (r - p) para usarlos como vectores, hacer el producto cruz obteniendo el vector normal y finalmente sustituir en la ecuación punto normal. Esto es especialmente útil cuando no se tiene a la mano la fórmula del determinante anterior. Se recomienda al lector verificar que se obtiene la misma respuesta.

Ángulos entre planos

Análogamente al caso de dos rectas, el ángulo entre dos planos se puede calcular por medio de los vectores normales que los definen, haciendo el producto punto o el producto cruz entre ellos y despejando el ángulo. Para planos paralelos el producto cruz vale cero, mientras que para planos perpendiculares el producto punto vale cero.

Ejemplo:

Hallar el menor ángulo entre los planos $-x - y + 3z + 8 = 0$, $-3x + y + 2z - 4 = 0$.

Solución:

Los vectores normales a estos planos son:

$\mathbf{n}_1 = (-1,-1,3)$, $\mathbf{n}_2 = (-3,1,2)$

El coseno del ángulo entre ellos es:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{n_1 n_2} = \frac{4}{\sqrt{155}} = 0.3213,$$

y el ángulo:

$\theta = 71.3^{o}$.

Ejercicios 2.5:

1) Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos dados:

a) (1,2,-1), (2,3,1) y (3,-1,2)

b) (-1,1,1), (0,2,3), (1,0,-1)

c) (3,2,1), (2,1,-1), (-1,3,2)

2) Verificar que los tres planos $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ tienen un punto en común y calcular sus coordenadas.

3) Determinar cuáles de los siguientes pares de planos son paralelos o perpendiculares:

a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$

b) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$

c) $x - 2z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$

d) $3x - 2y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$

e) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$

f) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$

g) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$

h) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$

4) Determinar los valores de l y m que hagan que los siguientes pares de ecuaciones determinen planos paralelos:

a) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$

b) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$

c) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$

5) Determinar los valores de l que den planos perpendiculares para los siguientes pares de ecuaciones:

a) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$

b) $5x + y + 3z - 2 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$

c) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$

6) Determinar los ángulos formados por la intersección de los siguientes pares de planos:

a) $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 2y - z + 3 = 0$

b) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$

c) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$

d) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$

Distancia de un punto a un plano

Para hallar la distancia de un punto a un plano hay una fórmula en términos de los coeficientes de la ecuación del plano y las coordenadas del punto análoga a la de la distancia de un punto a una recta en el plano. Si la ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, y el punto tiene coordenadas (x0,y0,z0), la distancia está dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

También para tres dimensiones se tiene un método para calcular la distancia de un punto a un plano con los vectores que los defines. La distancia de un punto P_0 a un plano que pasa por Q y con vector normal **n** es:

$$d = \frac{|(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0)\cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = |(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0)\cdot \hat{\mathbf{n}}|$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del plano $2x + y + z = 0$ al punto (1,1,2).

Solución:

Sustituyendo en la fórmula dada obtenemos:

$$d = \frac{|(2)(1) + (1)(1) + (1)(2) + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = 2.04$$

Ejemplo:

Calcular la distancia entre los planos paralelos siguientes:

$3x - y - z - 3 = 0$, $3x - y - z + 5 = 0$.

Solución:

Para hallar la distancia entre los planos podemos encontrar la distancia entre un punto de uno de los planos y el otro plano. Usaremos aquí la otra fórmula, para lo cual hay que construir los vectores indicados.

Tomemos la ecuación para el primer plano y sustituyamos $y = 0$, $z = 0$, lo que nos da $x = 1$, es decir, $P_0 = (1,0,0)$. Para el segundo plano tenemos que $\mathbf{n} = (3,-1,-1)$, y sustituyendo $x = 0$, $y = 0$ obtenemos $z = 5$, o sea que $Q = (0,0,5)$. Con la fórmula vectorial tendremos:

$$d = \left|\frac{(Q-P_0)\cdot \mathbf{n}}{n}\right| = \left|\frac{(-1,0,5)\cdot(3,-1,-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}}\right| = 2.41$$

Ejercicios 2.6:

Calcular la distancia entre los planos paralelos en cada uno de los siguientes casos:

1) x - 2y - 2z - 12 = 0, x - 2y - 2z - 6 = 0

2) 2x - 3y + 6z - 14 = 0, 4x - 6y + 12z + 21 = 0

3) 2x - y + 2z + 9 = 0, 4x - 2y + 4z - 21 = 0

4) 16x + 12y - 15z + 50 = 0, 16x + 12y - 15z + 25 = 0

5) 30x - 32y + 24z - 75 = 0, 15x - 16y + 12z - 25 = 0

6) 6x - 18y - 9z - 28 = 0, 4x - 12y - 6z - 7 = 0

2.4 Rectas en el espacio

La recta en el espacio será un poco más difícil de tratar, puesto que en el espacio se trata de la intersección de dos planos. Sin embargo, nuevamente los vectores vienen en nuestra ayuda para simplificar las cosas.

Ecuación vectorial de una recta

Para describir una recta en el espacio la ecuación vectorial nos sirve igual que en dos dimensiones, con la única diferencia que ahora el punto P_0 tiene tres coordenadas y el vector **v** ahora tiene tres componentes. La ecuación es pues:

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(v_x,v_y,v_z)$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5,-3,8) y (3,2,0).

Solución:

Para hallar las componentes del vector **v**, simplemente calculamos la diferencia entre los puntos dados:

v = (5 - 3, -3 - 2, 8 - 0) = (2,-5,8)

y tomamos como P_0 cualquiera de los puntos, obteniendo:

(x,y,z) = (3,2,0) + (2,-5,8)t.

Ecuaciones paramétricas de una recta

Al descomponer la ecuación vectorial de una recta se obtienen las tres ecuaciones escalares, llamadas ecuaciones paramétricas de la recta.:

$x = x_0 + tv_x$

$y = y_0 + tv_y$

$z = z_0 + tv_z$.

Ejemplo:

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (1,2,3) y (-3,-2,-1)

Solución:

$(x,y,z) = (1,2,3) + (1 - (-3), 2 - (-2), 3 - (-1))t = (1,2,3) + (4,4,4)t$

Descomponiendo:

$x = 1 + 4t$

$y = 2 + 4t$

$z = 3 + 4t$

Ejercicios 2.7:

1) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los dos puntos dados:

a) (1,-2,1), (3,1,-1)

b) (3,-1,0), (1,0,-3)

c) (5,3,8), (2,9,-7)

2) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (-1, -1, -1) y es paralela al vector **j**.

3) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1,-1,-3) y es paralela:

a) al vector **v** = (2,-3,4)

b) a la recta $x = 2t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 1$

c) a la recta $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$

4) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados:

a) (3,-1,2), (2,1,1)

b) (1,1,-2), (3,-1,0)

c) (0,0,1), (0,1,-2)

6) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1,-1,-3) y es paralela a:

a) el vector **v** = (2,-3,4)

b) la recta x = 3t - 1, y = -2t + 3, z = 5t + 2.

7) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados:

a) (3,-1,2), (2,1,1)

b) (1,1,-2), (3,-1,0)

c) (0,0,1), (0,1,-2)

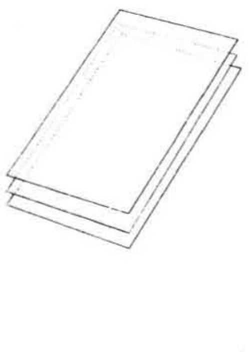
La recta como intersección de planos

Así como un sistema de dos ecuaciones en dos variables nos da un par de rectas que pueden o no intersecarse; un sistema de tres ecuaciones en tres variables nos da tres planos, con las siguientes posibilidades:

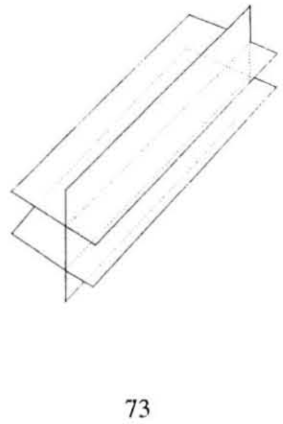
a) todos paralelos, b)dos paralelos y uno interseca a ambos, c) tres planos que se intersecan dos a dos, d) tres planos coincidentes, e) intersección en una recta, f) intersección común en un solo punto

Estas no son todas las combinaciones, pero nos dan idea de los diferentes casos que puede haber al generar tres planos en un espacio tridimensional. Esto se ve en las siguientes figuras.

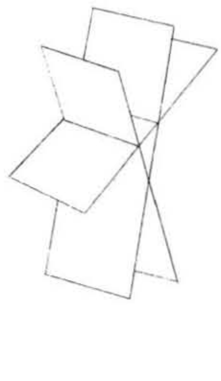
a)



b)



c)



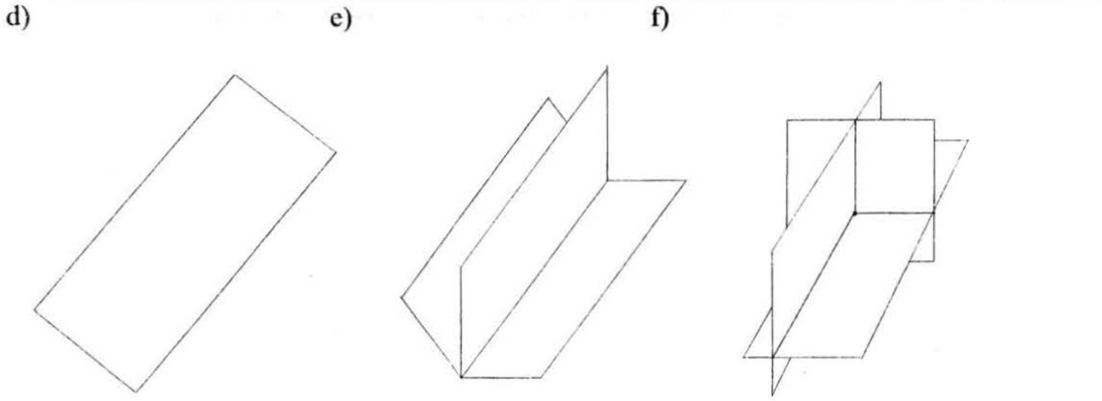


Figura 2.10. Intersecciones entre planos.

Para hallar la ecuación de la recta que resulta de la intersección de dos planos, se utiliza eliminación, lo cual nos dará como resultado la ecuación vectorial o bien las ecuaciones paramétricas de la recta.

Ejemplo:

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta donde intersecan los planos $x - 2y + z - 8 = 0$, $3x - y - z - 2 = 0$.

Solución:

Para resolver el sistema la matriz aumentada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} R2 - 3R1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -4 & 26 \end{pmatrix} 5R1 + 2R2 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 92 \\ 0 & 10 & -8 & 52 \end{pmatrix} R1/5,\ R2/10 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 92/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 52/5 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da la ecuación vectorial siguiente, haciendo $z = t$:

$(x,y,z) = (92/5,52/5,0) + (3/5,4/5,1)t$,

o las ecuaciones paramétricas:

$x = 92/5 + 3t/5$

$y = 52/5 + 4t/5$

$z = t$

Ecuaciones simétricas de una recta

Si se toman las ecuaciones paramétricas y se despeja a t, se obtienen las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Estas ecuaciones, tomadas dos a dos nos dan los planos de intersección. Notemos que por una recta pasa infinidad de planos, por lo cual si bien un par de planos que se intersecan nos determina una sola recta, una recta no determina un solo par de planos. Entre la infinidad de planos que una recta puede determinar, las ecuaciones simétricas nos dan los más simples, pues sus ecuaciones sólo dependen de dos variables.

Ejemplo:

Encontrar las ecuaciones simétricas para la recta dada por las ecuaciones paramétricas y de ahí un par de planos que se intersecan en esa recta:

$x = 92/5 + 3t/5$

$y = 52/5 + 4t/5$

$z = t$

Solución:

despejamos t de las ecuaciones dadas:

$$t=\frac{x-92/5}{3/5},\ t=\frac{y-52/5}{4/5},\ t=z$$

igualando las tres ecuaciones obtenemos:

$$\frac{x-92/5}{3/5}=\frac{y-52/5}{4/5}=z$$

Para los planos tomamos la primera y tercera expresiones y la segunda y tercera por separado:

$$\frac{x-92/5}{3/5}=z,\ \frac{y-52/5}{4/5}=z$$

De donde obtenemos:

$5x - 3z - 92 = 0$, $5y - 4z - 52 = 0$.

Ejercicios 2.8:

1) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (2,0,-3) y es paralela:

a) al vector **a** = (2,-3,5)

b) a la recta $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$

2) Hallar las ecuaciones simétricas de las rectas siguientes:

a) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$

b) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$

c) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$

3) Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas siguientes:

a) $2x + 3y - z - 4 = 0$, $3x - 5y + 2y + 1 = 0$

b) $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$

4) Hallar las ecuaciones de las rectas formadas por las intersecciones del plano $5x - 7y + 2z - 3$ con los planos coordenados.

5) Hallar la ecuación de la recta formada por la intersección del plano $3x - y - 7z + 9 = 0$ con el plano que pasa por el eje x y el punto (3,2,-5).

6) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$ y:

a) por el punto (4,-2,-3)

b) es paralelo al eje x

c) es paralelo al eje y

d) es paralelo al eje z

7) Determinar para qué valores de a y b los planos $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$:

a) tienen un punto en común

b) pasan por una recta

c) se cortan en tres rectas paralelas diferentes

8) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ y se corta con las rectas $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

9) Por los puntos $M_1 = (-6,6,-5)$ y $M_2 = (12,-6,1)$ se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.

10) Hallar las ecuaciones de las rectas formadas por las intersecciones del plano $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ con los ejes coordenados.

11) Hallar la ecuación de la recta formada por la intersección del plano $3x - y - 7z + 9 = 0$ con el plano que pasa por el eje x y por el punto (3,2,-5).

12) Hallar las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de las rectas donde intersecan los pares de planos dados:

a) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$

b) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z = 0$

c) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$

d) $2x + 3y - z - 4 = 0$, $3x - 5y + 2z + 1 = 0$

e) $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$

Ángulos entre rectas

El procedimiento para hallar el ángulo entre dos rectas en el espacio es el mismo que para rectas en el plano: se encuentra el producto punto o el producto cruz entre sus vectores y se despeja el ángulo. Si las rectas son paralelas el producto cruz da cero y si son perpendiculares el producto punto da cero.

Ejemplo:

Hallar los valores de A y B para los que el plano $Ax + By + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$.

Solución:

Para que la recta sea perpendicular al plano, también será paralela a su vector normal, que es:

$\mathbf{n} = (A,B,3)$,

el vector director de la recta es:

$\mathbf{v} = (2,-3,-2)$,

para que sean paralelos es necesario que **n** y **v** sean proporcionales. Sus componentes z están a la razón:

$r = -3/2$

de manera que se requiere que las otras estén a la misma razón, con lo cual:

$A = 2r = -3$

$B = -3r = 9/2$.

Ejercicios 2.9:

1) Hallar el ángulo entre las rectas: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

2) Hallar el ángulo formado por las rectas: $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$; $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$.

3) Hallar el valor de m para que la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ sea paralela al plano $x - 3y + 6z + 7 = 0$.

4) Hallar el valor de C para que la recta $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 4z + 1 = 0$ sea paralela al plano $2x - y + Cz - 2 = 0$.

5) Hallar los valores de A y D para los que la recta $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$, está contenida en el plano $Ax + 2y - 4z + D = 0$.

6) Hallar los valores de n y C para los que la recta $\frac{x-2}{n} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ es perpendicular al plano $3x - 2y + Cz + 1 = 0$.

7) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,-3) y es paralelo a las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

8) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = -t -2$ y es paralelo a la recta $2x - y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z - 5 = 0$.

9) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano $3x + 2y - z - 5 = 0$.

10) Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto (3,-2,4), es paralela al plano $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ y se corta con la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

11) Hallar el ángulo más pequeño entre los siguientes pares de rectas:

a) $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$; $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$

b) $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = t - 7; x = 3t - 7, y = -2t + 4, z = 3t + 4$

c) $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = -4t + 6; x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4$

d) $x = t + 1, y = 2t - 9, z = -t - 12; x = 3 - 4t, y = 5 + 3t, z = -2 + 12t$

e) $x = 5 - 2t, y = -3 + 2t, z = 5 - t; x = 2 + 2t, y = 1 - 2t, z = 3 + t$

Intersección de rectas

Cuando se tienen dos rectas que se intersecan en un punto, podemos encontrar las coordenadas del punto de intersección al despejar alguna de las variables en una de las ecuaciones simétricas de una recta, y sustituyéndola en una ecuación simétrica de la recta que involucre a las mismas variables. Esto nos dará una coordenada, y las otras se encuentran con ayuda de las otras ecuaciones simétricas de cualquiera de las dos rectas. Un error muy frecuente entre los alumnos es suponer que se obtienen valores iguales de las coordenadas al sustituir valores iguales del parámetro variable t en las ecuaciones paramétricas; esto se debe evitar a toda costa.

Ejemplo:

Demostrar que las rectas $(x,y,z) = (4,2,-3) + (2,-3,-5/2)t$, $(x,y,z) = (-1,5,-4) + (-9,9,4)t$ se intersecan y hallar el punto de intersección.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$x = 4 + 2t, y = 2 - 3t, z = -3 - 5t/2$

$x = -1 - 9t, y = 5 + 9t, z = -4 + 4t$

De donde se obtienen las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-5/2}$$

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y-5}{9} = \frac{z+4}{4},$$

de la primer recta tomamos las dos primeras expresiones, así también para la segunda:

$-3(x - 4) = 2(y - 2)$

$9(x + 1) = -9(y - 5)$

y después resolvemos el sistema:

$3x + 2y = 16$

$x + y = 4$

lo que nos da las soluciones:

$x = 8$, $y = -4$

y el valor de z lo hallamos de alguna de las igualdades que la involucran, por ejemplo la última:

$$\frac{y-5}{9} = \frac{z+4}{4}$$

$z = 4y/9 - 56 = -8$,

o sea que el punto de intersección es (8,-4,-8). Obsérvese que si igualamos las ecuaciones paramétricas para x, obtenemos que:

$x = 4t + 2 = -1 - 9t$,

lo que al despejar nos da $t = -3/13$. Pero cuando sustituimos esto en y para la primera recta obtenemos:

$y = 2 - 3(-3/13) = 35/13$

mientras que para la segunda obtenemos:

$y = 5 + 9(-3/13) = 38/13$

lo que claramente muestra lo erróneo de igualar los valores de t para hallar intersecciones de rectas.

Distancia de un punto a una recta

Para hallar la distancia de un punto a una recta en el espacio se utiliza el vector $\hat{\mathbf{v}}$ que define la dirección de la recta y el vector que resulta al restar las coordenadas del punto P_0 al punto P_{ext}. Como el producto cruz nos da la proyección del vector $(P_{ext} - P_0)$ sobre la perpendicular a $\hat{\mathbf{v}}$, al calcular la magnitud de tal proyección tendremos la distancia buscada. Esto se puede resumir como la fórmula:

$$d = |(P_{ext} - P_0) \times \hat{\mathbf{v}}|$$

Ejemplo:

Calcular la distancia de la recta $x = 4 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 - 5t/2$ al punto (2,2,2).

Solución:

Para la recta se tiene $P_0 = (4,2,-3)$ y después de dividir a $\mathbf{v}$ entre su magnitud obtenemos $\hat{\mathbf{v}} = (0.45,0.68,-0.57)$, con lo cual aplicamos la fórmula:

$$d = |(P_{ext} - P_0) \times \hat{\mathbf{v}}| = |(-2,0,5) \times (0.45,0.68,-0.57)| = |-3.4\mathbf{i} + 1.11\mathbf{j} + 1.36\mathbf{k}| = 3.82.$$

Ejercicios 2.10:

1) Demostrar que las rectas $x + 1 = 4t$, $y - 3 = t$, $z - 1 = 0$; $x + 13 = 12t$, $y-1 = 6t$, $z - 2 = 3t$, se intersecan. Hallar el punto de intersección.

2) Calcular la distancia del punto (1,-1,-2) a la recta $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

3) Calcular la distancia d del punto (2,3,-1) a las rectas siguientes:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$

b) $x = t - 1, y = t + 2, z = 4t + 13$

c) $2x - 2y + z + 3 = 0, 3x - 2y + 2z + 17 = 0$

4) Hallar la distancia más corta entre las dos rectas dadas en cada caso:

a) $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}, \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$

b) $x = 2t - 4, y = -t + 4, z = -2t - 1; x = 4t - 5, y = -3 + 5, z = -5t + 5$

c) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$, $x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$

5) Verificar que las rectas $2x + 2y - z - 10 = 0, x - y - z - 22 = 0$; $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ son paralelas y calcular la distancia entre ellas.

6) Calcular las distancias de la recta $x = 2t - 1, y = 3t + 4, z = 6t - 8$ al origen de coordenadas y al punto (1,1,1).

Intersección entre rectas y planos

Si se tienen un plano y una recta en el espacio, puede suceder que la recta sea paralela al plano o esté contenida en él, pero lo más probable es que esté fuera del plano pero lo atraviese en un punto. Para hallar la intersección se despejan dos variables de las ecuaciones simétricas, dejándolas como función de la tercera únicamente, y se sustituye en la ecuación del plano. Esto nos da una coordenada y las otras dos se obtienen al sustituir en los despejes hechos anteriormente. Si acaso la recta es paralela al plano, no encontraremos solución a las ecuaciones planteadas; pera verificar que en efecto hay paralelismo se hace el producto entre el vector normal del plano y el vector director de la recta. Si la recta está contenida en el plano, al resolver obtendremos infinitas soluciones, que simplemente nos darán otra ecuación para la recta.

Ejemplo:

Hallar el punto donde se intersecan la recta $x - 4 = 5t, y + 2 = t, z - 4 = -t$ y el plano $3x - y + 7z + 8 = 0$.

Solución:

Las ecuaciones simétricas de la recta son:

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1},$$

de ellas despejamos a y en función de z y a x en función de z, y obtenemos:

$x = -5z + 24,\ y = -z + 2,$

sustituyendo en la ecuación del plano tenemos que:

$3(-5z + 24) - (-z + 2) + 7z + 8 = 0$

$z = 78/7$

$x = -222/7$

$y = -64/7.$

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = -t - 2$ y es paralelo a la recta $2x - y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z - 5 = 0$.

Solución:

Para esto vamos a hallar el vector director de las rectas involucradas. La primer recta tiene como vector director a $\mathbf{v}_1 = (3,2,-1)$. Para la segunda recta lo encontramos haciendo el producto cruz de los vectores normales de los planos, $\mathbf{n}_1 = (2,-1,1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1,2,-1)$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = (-1,3,5).$$

Con estos podemos encontrar el vector normal al plano buscado, haciendo el producto cruz:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 13i - 14j + 11k = (13,-14,11).$$

Para el punto P_0 hacemos $t = 0$, lo que nos da $P_0 = (1,3,-2)$, con esto la ecuación del plano es:

$13(x - 1) - 14(y - 3) + 11(z + 2) = 13x - 14y + 11z + 51 = 0.$

Ejercicios 2.11:

1) Hallar el punto de intersección de la recta y el plano:

a) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6},\ 2x + 3y + z - 1 = 0$

b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, x - 2y + z - 15 = 0

c) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, x + 2y - 2z + 6 = 0

2) Hallar el punto donde se intersecan la recta y el plano dados en cada caso:

a) x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = 6t; 2x + 3y + z - 1 = 0

b) x = -3 + 3t, y = 2 - t, z = -1 - 5t; x - 2y + z - 15 = 0

c) x = -2 - 2t, y = 1 + 3t, z = 3 + 2t; x + 2y - 2z + 6 = 0

3) Hallar los puntos de intersección de la recta 2x + y - z - 3 = 0, x + y + z - 1 = 0 con los planos coordenados.

4) Encontrar los valores de D para los que la recta 2x + 3y - z + D = 0, 3x - 2y + 2z - 6 = 0 corta:

a) al eje x

b) al eje y

c) al eje z

5) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta x = 2t + 1, y = -3t + 2, z = 2t - 3 y por el punto (2,-2,1).

6) Hallar la ecuación del plano que pasa por las dos rectas paralelas: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

7) Demostrar que la recta: x = 0, y = t, z = t, está en el plano 6x + 4y - 4z = 0, es paralela a el plano 5x - 3y + 3z = 1 y está debajo de él, es paralela al plano 6x + 2y - 2z = 3 y está arriba de él.

8) Demostrar que la recta x - 4 = 2t, y = -t, z + 1 = -4t es paralela al plano 3x + 2y + z - 7 = 0.

9) Por los puntos M_1 = (-6,6,-5) y M_2 = (12,-6,1) pasa una recta. Hallar los puntos en que esta recta interseca a los planos coordenados.

10) Demostrar que la recta x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5 es paralela al plano 4x - 3y - 6z - 5 = 0.

11) Demostrar que la recta donde se intersecan los planos $5x - 3y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$ está contenida en el plano $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

12) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ y es paralelo al vector $\mathbf{v} = (2,-1,-2)$.

13) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ y es paralelo al vector $\mathbf{v} = (7,9,17)$.

14) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ y es perpendicular al plano $x - 2y + z + 5 = 0$.

15) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ y es perpendicular al plano $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

16) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2,-3,-5)$ y es perpendicular al plano $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

17) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,-1,-1)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{4}$.

18) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,-2,1)$ y es perpendicular a la recta $x - 2y + z - 3 = 0$, $x + y - z + 2 = 0$.

Capítulo 3

Cónicas y esferas

Para definir una cónica, se utiliza una ecuación de segundo grado. Dependiendo de los valores de los coeficientes tendremos una circunferencia, parábola, elipse o hipérbola. Esto se estudiará detalladamente más adelante. Por lo pronto, veremos cada una de estas curvas independientemente.

Circunferencia

Una circunferencia consta de todos los puntos que equidistan de otro punto al que llamamos centro. La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama radio. Sea un punto sobre la circunferencia (x,y) con centro en el origen, como se ve en la siguiente figura:

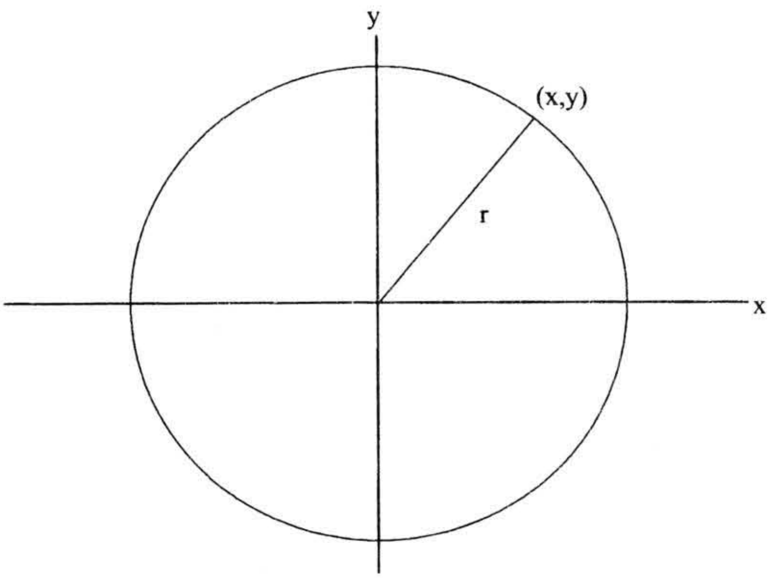


Figura 3.1. La circunferencia.

La distancia r del punto (x,y) al centro es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

al elevar al cuadrado obtenemos:

$x^2 + y^2 = r^2$,

a la cual se le llama la ecuación canónica de la circunferencia.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y cuyo radio mide 7 unidades y graficarla.

Solución:

En la ecuación en forma canónica hacemos:

$x^2 + y^2 = 7^2 = 49.$

La gráfica de esta circunferencia es la siguiente:

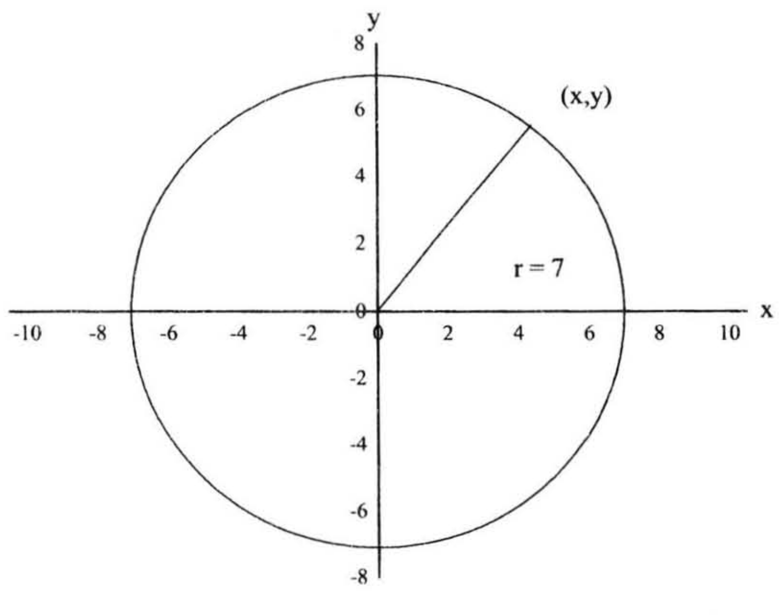


Figura 3.2.

Existe una forma paramétrica de especificar la ecuación de la circunferencia, usando senos y cosenos:

$x = r \cos t,\ y = r \operatorname{sen} t$

o lo que es equivalente:

$(x,y) = r(\cos t, \operatorname{sen} t)$

La ecuación de la circunferencia tiene otros términos cuando el centro no está en el origen, pero eso se verá más adelante.

Recta tangente a una circunferencia

La recta tangente a una circunferencia en el punto P_0 es perpendicular al radio trazado desde ese mismo punto. Por tal razón, si se conoce el punto de tangencia es muy fácil hallar la ecuación de la recta tangente: tan sólo es necesario calcular la pendiente y sustituir en la ecuación punto pendiente de la recta. Para hallar la pendiente se usa la condición de perpendicularidad entre las pendientes, esto es, que si la recta de pendiente m_1 es perpendicular a la recta de pendiente m_2, se cumple que $m_1 = -1/m_2$.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (-3,4).

Solución:

Puesto que la circunferencia pasa por el centro, la pendiente de la recta que contiene al radio que va del centro al punto dado es:

$m_2 = -4/3$,

por lo tanto, la recta perpendicular a ella tiene pendiente:

$m_1 = 3/4$

y la ecuación de la recta será:

$(y - 4) = (3/4)(x + 3)$

o bien

$3x + 4y - 25 = 0$.

Ejercicios 3.1:

Encontrar la ecuación para cada una de las siguientes circunferencias con centro en el origen:

1) Radio r = 4.

2) Radio r = 9.

3) Diámetro 7.

4) Diámetro 11.

5) Pasa por el punto (-3,3).

6) Pasa por el punto (5,-12).

7) Pasa por el punto (8,1).

Parábola

La parábola es la curva que consta de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz. Para deducir la ecuación de la parábola en forma canónica consideremos un punto cualquiera (x,y) sobre la parábola y hallemos las distancias d_1 y d_2, que son las distancias del punto (x,y) al foco (0,a) y a la derectriz y = -a, respectivamente. Esto se ve en la siguiente figura:

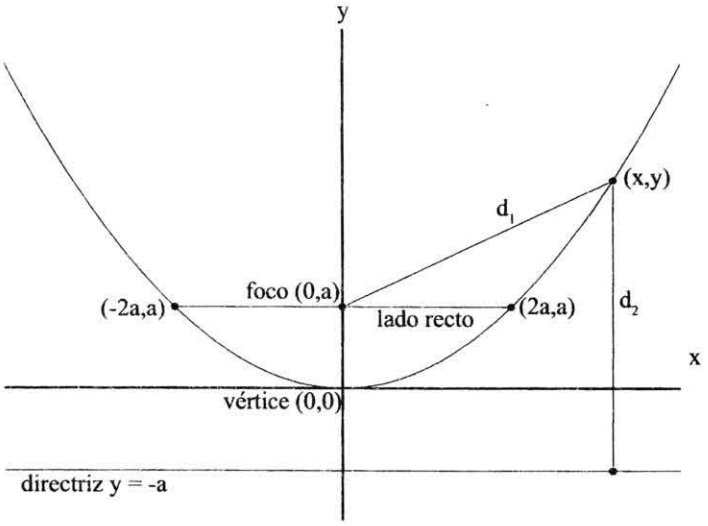


Figura 3.3. La parábola y sus elementos.

La distancia d_1 es:

$$d_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$$

mientras que la distancia del punto (x,y) a la directriz es:

$$d_2 = y + a$$

Igualando d_1 a d_2 y elevando al cuadrado tenemos que:

$$x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2,$$

transponiendo al segundo miembro el segundo término del primer miembro y desarrollando nos da:

$x^2 = (y^2 + 2ay + a^2) - (y^2 - 2ay + a^2)$,

simplificando obtenemos:

$x^2 = 4ay$.

El punto de la parábola que está en el origen se llama *vértice* de la parábola. Al segmento que va del punto (-2a,0) al punto (2a,0) se le llama *lado recto* de la parábola; vemos que su longitud es 4a.

De lo anterior hallamos que lo que caracteriza a una parábola es el vértice y la distancia del vértice al foco (dada por a).

Nótese que para esta parábola se hicieron estas suposiciones: que la directriz es paralela al eje x además de que el foco está arriba de la directriz. Podrían darse otros casos: que el foco pase por debajo de la directriz, que la directriz sea paralela al eje y, que la directriz no sea paralela a los eje coordenados, etc.

Para algunos de estos casos se tiene lo siguiente:

Si la directriz es paralela al eje x, pero el foco está abajo de ella, la parábola abre hacia abajo (es vertical) y la ecuación toma la forma:

$x^2 = - 4ay$.

Si la directriz es paralela al eje y con el foco a la derecha, la parábola abre hacia la derecha (es horizontal) y su ecuación es de la forma:

$y^2 = 4ax$.

Si la directriz es paralela al eje y con el foco a la izquierda, abre hacia la izquierda (es horizontal) y su ecuación es de la forma:

$y^2 = - 4a$.

Si la directriz no es paralela a los eje coordenados, la ecuación toma una forma más difícil, pero no se estudiará aquí. También puede suceder que el vértice no esté en el origen, pero eso se pospone para otra sección.

Se puede escribir la ecuación de la parábola vertical en la siguiente forma paramétrica:

$x = t$, $y = \pm t^2/4a$,

o equivalentemente:

$$(x,y) = (t, \frac{t^2}{4a});$$

donde el signo ± indica que si la parábola abre hacia arriba se toma el signo +, pero si abre hacia abajo se toma el signo -; para la parábola horizontal se escribe:

$x = \pm\, t^2/4a$, $y = t$,

o equivalentemente:

$$(x,y) = (\pm\frac{t^2}{4a}, t);$$

con indicaciones análogas para el signo ± en x.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuyo lado recto mide 8 unidades, sabiendo que la parábola abre hacia la izquierda.

Solución:

Puesto que el lado recto mide 8 unidades, a vale 2. Con esto y los datos anteriores sustituimos en la ecuación:

$y^2 = -\,4(2)x = -\,8x.$

Ejemplo:

Dibujar la parábola dada por la ecuación $y^2 = -9x$.

Solución:

De la forma de la ecuación y su signo vemos que la parábola es horizontal y abre a la izquierda. El coeficiente de x es 9, así que a = 9/4. De esto deducimos que el foco está en (-9/4,0) y la directriz es la recta x = 9/4. La longitud del lado recto es 9, por lo que sus extremos están en (9/4,±9/2). Con esta información podemos obtener la siguiente gráfica.

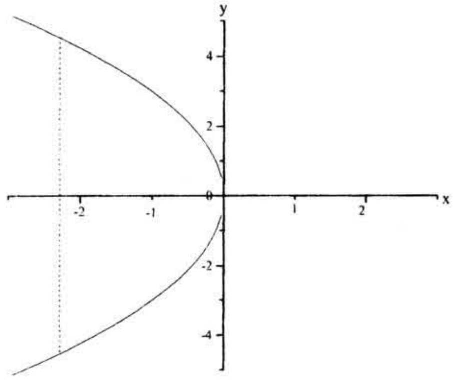


Figura 3.4.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que pasa por el punto (2,3) y es simétrica con respecto al eje x.

Solución:

Como es simétrica respecto al eje x, su ecuación es de la forma $y^2 = 4ax$. El signo de a es positivo, puesto que pasa por un punto del primer cuadrante. Para obtener el valor de a, sustituimos los valores de x,y en la ecuación y despejamos a:

$3^2 = 4a(2) = 8a$

$a = 9/8$,

por lo que la ecuación de la parábola es:

$y^2 = 9x/2$.

Ejercicios 3.2:

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, sabiendo que:

1) la parábola está ubicada en el semiplano derecho , es simétrica con respecto al eje x y $a = 3/2$.

2) la parábola está situada en el semiplano izquierdo, es simétrica con respecto al eje x y $a = 0.5$.

3) la parábola está situada en el semiplano superior, es simétrica con respecto al eje y, y tiene $a = 1/4$.

4) la parábola está situada en el semiplano inferior, es simétrica con respecto al eje y, y tiene $a = 3$.

Determinar el valor de a y las coordenadas de su foco para cada una de las siguientes parábolas:

5) $y^2 = 12x$

6) $x^2 = 5y$

7) $y^2 = -4x$

8) $x^2 = -y$

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y las coordenadas de su foco, sabiendo que:

9) la parábola es simétrica con respecto al eje x, y pasa por el punto (9,6)

10) la parábola es simétrica con respecto al eje x, y pasa por el punto (-1,3)

11) la parábola es simétrica con respecto al eje y, y pasa por el punto (1,1)

12) la parábola es simétrica con respecto al eje y, y pasa por el punto (4,-8)

13) Hallar la ecuación de la parábola que tiene el foco (0,-3) y pasa por el origen de coordenadas, sabiendo que su eje coincide con el eje y.

Elipse

Una elipse es una curva formada por puntos cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre igual. Para encontrar la ecuación de la elipse, tomamos un punto cualquiera de la elipse, cuyas coordenadas son (x,y) y encontramos las distancias d_1 y d_2 a cada uno de los focos, cuyas coordenadas son $F_1 = (-c,0)$ y $F_2 = (c,0)$, respectivamente. Esto se ilustra en la figura siguiente:

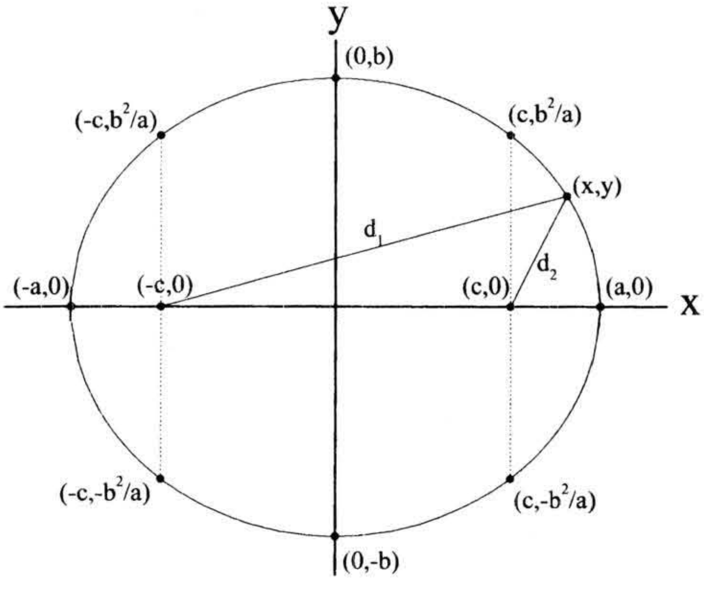


Figura 3.5. La elipse y sus elementos básicos.

Tenemos pues que $d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Hacemos la suma, llamando a la constante 2a:

$$d_1 + d_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Para simplificar primero trasponemos el segundo radical al segundo miembro:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

elevamos ambos miembros al cuadrado:

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x - c)^2 + y^2$,

desarrollando los binomios y simplificando:

$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

que al volver a elevar al cuadrado nos da:

$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$,

desarrollando y simplificando se obtiene:

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Aquí es costumbre hacer $b^2 = a^2 - c^2$, con lo que al dividir lo anterior entre a^2b^2 nos da la ecuación de la elipse en forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Los puntos $V_1 = (-a,0)$ y $V_2 = (a,0)$ se llaman vértices de la elipse. Al segmento que va de uno al otro de los vértices se le llama eje mayor. El segmento que va de $B_1 = (0,-b)$ a $B_2 = (0,b)$ se le llama eje menor. Los segmentos de la figura que van de un lado a otro de la elipse pasando por los focos se llaman lados rectos de la elipse.

Como se puede observar, una elipse está totalmente determinada por los valores de a y b, a los que se les llama a veces semiejes de la elipse. Frecuentemente se utiliza también la razón entre c y a para caracterizar elipses, cantidad a la que se le llama excentricidad:

$e = c/a$.

La excentricidad de la elipse es una medida de lo alargada que está comparada con una circunferencia. El valor de e está entre cero y uno (sin tomar esos valores), y mientras más cercano a cero es el valor de e, más redonda es la elipse, mientras que si está muy cerca de uno está cada vez más alargada.

La ecuación que se dedujo para la elipse parte de la suposición de que el eje mayor es paralelo al eje x, pero si fuera paralela al eje y, su ecuación sería casi igual, sólo se intercambiarían los denominadores. Esto nos sirve para saber cuál es la orientación de la elipse: si el denominador de x^2 es mayor que el de y^2, la elipse es horizontal, pero si es menor, la elipse es vertical.

También hay una forma paramétrica para la ecuación de la elipse:

$x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$,

o equivalentemente:

$(x,y) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la elipse con focos en $(0,\pm 4)$ y un vértice en $(0,6)$.

Solución:

De la ubicación de los focos sabemos que $c = 4$. Como el vértice está a 6 unidades, sabemos que $a = 6$. De aquí resulta que $b^2 = a^2 - c^2 = 20$. Con esto sustituimos en la forma canónica y encontramos la ecuación:

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36} = 1.$$

Ejercicios 3.3:

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo que:

1) sus semiejes son iguales a 5 y 2.

2) su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre los focos $2c = 8$.

3) su eje menor es igual a 24 y la distancia entre los focos $2c = 10$.

4) la distancia entre sus focos $2c = 6$ y la excentricidad $e = 3/5$.

5) su eje mayor es igual a 20 y la excentricidad $e = 3/5$.

6) su eje menor es igual a 10 y la excentricidad $e = 12/13$.

7) la distancia entre sus directrices es igual a 5 y la distancia entre sus focos $2c = 4$.

8) su eje mayor es igual a 8 y la distancia entre sus focos es igual a 6.

9) su eje menor es igual a 6 y la distancia entre sus vértices es igual a 14.

10) la distancia entre sus vértices es igual a 32 y la excentricidad $e = 1/2$.

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje de ordenadas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo además que:

11) sus semiejes son iguales respectivamente a 7 y 2.

12) su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre sus focos 2c = 8.

Hipérbola

La hipérbola es una curva con dos ramas que consta de los puntos cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Para encontrar la ecuación de la elipse en forma canónica se toma un punto de coordenadas (x,y) sobre la hipérbola y se calculan las distancias d_1 y d_2 a los focos. Esto se muestra en la figura de la página siguiente.

Las distancias d_1 y d_2 son:

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Al restarlas e igualar la resta a una constante a la que llamaremos 2a obtenemos:

$$d_1 - d_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

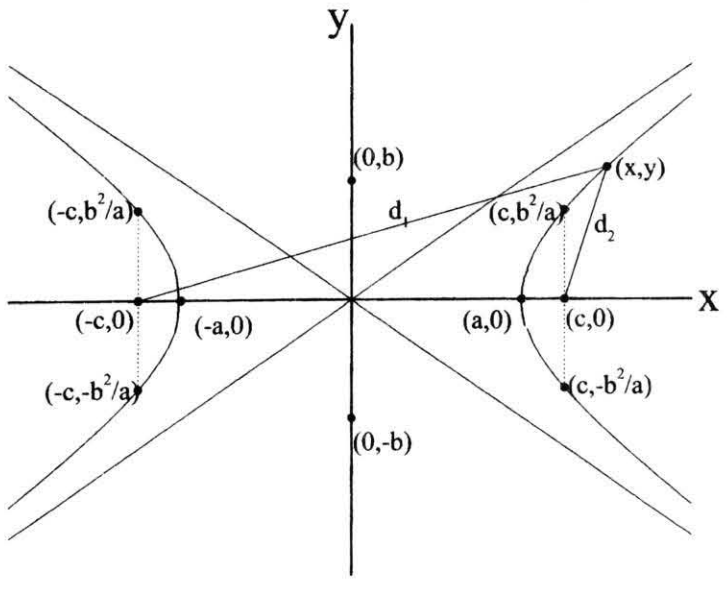


Figura 3.6. La hipérbola y sus elementos básicos.

La razón de usar el signo ± es que a veces ocurrirá que d_2 sea mayor que d_1 y viceversa. Si pasamos al segundo miembro la segunda raíz y elevamos al cuadrado obtenemos:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2,$$

que al simplificar queda como:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

Al elevar al cuadrado por segunda vez nos da:

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2],$$

que tras desarrollar y simplificar se convierte en:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + c^2a^2 + y^2a^2$$

Aquí se hace que $b^2 = c^2 - a^2$, con lo cual al pasar al primer miembro las variables y al segundo las constantes, y dividiendo entre a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación en forma canónica para la elipse con centro en el origen. Esto es válido para el caso en que la hipérbola es horizontal, ya que si es vertical hay que cambiar de orden las variables en el primer miembro. Los segmentos de la figura que van de un lado a otro de la hipérbola pasando por los focos se llaman lados rectos de la hipérbola. Las dos rectas que pasan por fuera de la hipérbola se llaman asíntotas. La hipérbola nunca sale de la región entre ellas, aunque cada vez se acerca más a dichas rectas. Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = (b/a)x$$

$$y = (-b/a)x,$$

si la hipérbola horizontal, para la vertical se cambian de orden las variables. También se puede definir excentricidad para la hipérbola, pero en este caso siempre será mayor que uno. Cuando $a = b$, se dice que la hipérbola es rectangular, porque las asíntotas forman un ángulo recto, o bien se dice que es equilátera, pues sus ejes son iguales.

La hipérbola horizontal también se describe en forma paramétrica con:

$$x = \pm a \cosh t, \; y = b \operatorname{senh} t,$$

o bien:

$(x,y) = (\pm\ a\ \cosh t, b\ \operatorname{senh} t)$;

mientras que la vertical se describe con:

$x = \pm\ a\ \operatorname{senh} t,\ y = b\ \cosh t$,

o bien:

$(x,y) = (a\ \operatorname{senh} t, \pm b\ \cosh t)$;

el signo $\pm$ indica que para cada rama hay que dar uno de los dos signos.

Ejemplo:

Dibujar la hipérbola cuya ecuación es $36x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$.

Solución:

Si dividimos entre 2304, la ecuación queda en la forma:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

La gráfica es una hipérbola con los siguientes parámetros: $a = 8$, $b = 6$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$. Por lo tanto, los vértices son $(\pm 8,0)$ y los focos son $(\pm 10,0)$. Cada lado recto tiene una longitud de $2b^2/a = 9$. Las ecuaciones de las asíntotas son $3x - 4y = 0$ y $3x + 4y = 0$. Esta información se usa para hacer la siguiente gráfica.

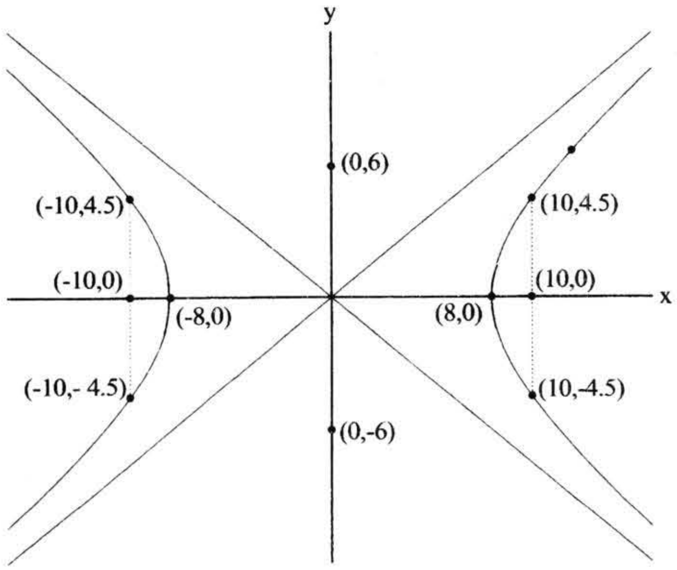


Figura 3.7.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco en (5,0) y un vértice en (-3,0).

Solución:

De la ubicación de vértice y foco sabemos que la hipérbola es horizontal y vemos que $a = 3$, $c = 5$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 4$. Sustituyendo estos datos en la ecuación canónica obtenemos:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ejercicios 3.4:

Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de las abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo además que:

1) sus ejes $2a = 10$ y $2b = 8$.

2) la distancia entre sus focos $2c = 10$ y el eje menor $2b = 8$.

3) la distancia entre los focos $2c = 6$ y la excentricidad $e = 3/2$.

4) el eje $2a = 16$ y la excentricidad $e = 5/4$.

5) las ecuaciones de las asíntotas $y = \pm 4/3\, x$ y la distancia entre los focos $2c = 20$.

Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de ordenadas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas sabiendo que:

6) sus semiejes son $a = 6$, $b = 18$.

7) la distancia entre los focos $2c = 10$ y la excentricidad $e = 5/3$.

8) las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm 12/5\, x$, y la distancia entre los vértices es igual a 48.

9) la distancia entre las directrices es igual a 15/2 y la excentricidad $e = 7/5$.

10) Para la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ encontrar los valores de a y b, los focos, la excentricidad, las asíntotas.

11) Determinar la excentricidad de una hipérbola equilátera.

Traslación de ejes

En la deducción de las ecuaciones de las cónicas anteriores se supuso siempre que los puntos notables (centro o vértice) estaban en el origen. Cuando esto no es así, la ecuación toma formas diferentes. Para simplificar la ecuación de una cónica cuyo centro o vértice no coincide con el origen, es costumbre trasladar el origen a la posición deseada, y trabajar con las coordenadas de los nuevos ejes. Haciendo esto, las ecuaciones se simplifican a la forma canónica encontrada para cada caso. Supóngase por ejemplo que se tiene una circunferencia de radio r y con centro en el punto de coordenadas (h,k). Si se traslada el origen del sistema de coordenadas a ese punto, se tendrán las nuevas coordenadas obtenidas de las antiguas por medio de las relaciones:

$x' = x - h$

$y' = y - k$

con lo cual la ecuación canónica de la circunferencia referida a estas nuevas coordenadas es:

$x'^2 + y'^2 = r^2$

Pero si se desea escribir la ecuación de la circunferencia referida a las coordenadas anteriores, debemos sustituir x' y y' en la ecuación anterior:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

al desarrollar los bonomios y simplificar se tendrá una ecuación de la forma:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$

que se conoce como la ecuación de la circunferencia en forma general.

Lo mismo se puede hacer para las otras cónicas. Así pues, si se tiene una parábola con vértice en el punto de coordenadas (h,k) su ecuación será:

$(y - k)^2 = 4a(x - h).$

que al desarrollarse nos dará una ecuación de la forma general:

$y^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Si la parábola es horizontal se tendrán las ecuaciones:

$(x - h)^2 = 4a(y - k)$

y

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

para la forma canónica y general, respectivamente.

Para una elipse con centro en (h,k) se tendrá en forma canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y en forma general:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

y para una hipérbola con centro en (h,k) se tienen las ecuaciones:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y

$Ax^2 - Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$

En general toda ecuación de una cónica en la forma canónica se puede llevar a la forma general y viceversa.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación general de la parábola con vértice en el punto (2,5) y cuyo foco está en el punto (2,9).

Solución:

De las condiciones del problema vemos que la parábola es vertical (pues el vértice y el foco son paralelos al eje y) y abre hacia arriba (pues el foco está por arriba del vértice), por lo que la ecuación es de la forma:

$(x - h)^2 = 4a(y - k)$;

como la distancia del vértice al foco es 4 y usando las coordenadas del vértice, al sustituir nos da:

$(x - 2)^2 = 4(4)(y - 5)$,

y desarrollando:

$x^2 - 4x + 16y + 84 = 0$.

Ejemplo:

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con focos en los puntos (2,-7) y (9,-7), y que tiene a = 4.

Solución:

De los datos que tenemos calculamos la distancia entre los focos, de donde vemos que c = 7/2, así que:

$b^2 = a^2 - c^2 = 15/4$

por lo que la ecuación canónica es:

$$\frac{(x-11/2)^2}{4^2} - \frac{(y+7)^2}{(15/4)^2} = 1 \cdot$$

Ejercicios 3.5:

Escribir la ecuación general de la circunferencia que tiene las siguientes características:

1) Centro en (3,-4), radio 6.

2) Centro en (5,-12), radio 13.

3) El segmento que une a los puntos (-1,5) y (-5,-7) es un diámetro.

4) El segmento que une a los puntos (-3,-4) y (4,3) es un diámetro.

5) Pasa por el punto (-3,5) y su centro está en (1,-3).

Encontrar la ecuación general de la parábola con las siguientes características:

6) Vértice en (3,4), eje horizontal, pasa por (2,-5).

7) Vértice en (-1,-2), eje vertical, pasa por (3,6).

8) Eje horizontal, pasa por los puntos (-1,1), (3,4) y (2,-2).

9) Eje vertical, pasa por los puntos (0,0), (3,0) y (-1,4).

Encontrar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas:

10) Centro en (5,1), vértice en (5,4), un extremo del eje menor en (3,1).

11) Vértice en (6,3), focos en (-4,3) y (4,3).

12) Vértices en (-1,3) y (5,3), longitud del eje menor 4.

13) Focos en (-4,2) y (4,2), longitud del eje mayor 10.

14) Centro en (-2,2), un vértice en (-2,6), un foco en $(-2,2+\sqrt{12})$.

Encontrar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas:

15) Centro en (2,0), un foco en (10,0), un vértice en (6,0).

16) Centro en (6,0), eje de simetría a lo largo del eje x, asíntotas $5x - 6y - 30 = 0$ y $5x + 6y - 30 = 0$.

17) Centro en (2,2), un vértice en (5,2), un foco en (10,2), eje de simetría paralelo al eje x.

18) Centro en (2,-3), un foco en (2,-7), un vértice en (2,-1).

Ecuación general de segundo grado

Toda cónica al llevarla a la forma general nos da una ecuación de segundo grado. Lo opuesto también es cierto para ciertas condiciones. Veremos que toda ecuación de segundo grado en las variables x,y nos da una cónica, pero que algunas muestran lo que se llama degeneración. La ecuación más general de segundo grado tiene la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

sin embargo, sólo se estudiará la ecuación en que $B = 0$, pues si hay términos *cruzados* las cosas se complican enormemente.

Cada ecuación describirá una cónica diferente dependiendo de los valores de los coeficientes de los términos de segundo grado. Así pues, toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia. Pero también una ecuación de la forma $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, lo que nos lleva a concluir que toda ecuación de segundo grado en que los coeficientes de los términos cuadráticos sean iguales (no sólo en valor absoluto, sino también en signo) describe una circunferencia. Una ecuación en que tanto A como C tienen el mismo signo, describe una elipse. Y la ecuación que tiene signos diferentes para A y C nos describe una hipérbola. Si alguno de los coeficientes A o C (pero no ambos, pues entonces ya no tendríamos una ecuación de segundo grado) es igual a cero, describe una parábola. Para hallar la ecuación de una cónica dados algunos de sus puntos, debemos sustituir los valores de x,y de los puntos dados en la ecuación general y despejar cada uno de los coeficientes A, C, D, E, F en las ecuaciones resultantes.

La ecuación general de la circunferencia que pasa por tres puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) se puede encontrar por medio del determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola horizontal que pasa por los puntos (-2,1), (1,2), (-3,1).

Solución:

Sustituyendo en la ecuación de la parábola horizontal $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ cada uno de los puntos nos queda el sistema:

$1 - 2D + E + F = 0$

$4 + D + 2E + F = 0$

$9 - D + 3E + F = 0$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por eliminación (o determinantes, etc.) obtenemos que:

$D = 2/5$, $E = -21/5$, $F = 4$.

Por lo tanto la ecuación de la parábola es:

$y^2 + 2x/5 - 21y/5 + 4 = 0$,

o bien:

$5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$.

Ejemplo:

Graficar la cónica dada por la ecuación:

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 80 = 0$.

Solución:

Como los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales, vemos que se trata de una circunferencia. Para graficarla necesitamos el centro y el radio, por lo que manipulamos la ecuación hasta llevarla a la forma canónica. Primero dividimos entre dos la ecuación para obtener:

$x^2 + y^2 - 4x + (5/2)y - 40 = 0$.

Ahora separamos los términos que tienen x, x^2, y, y^2, para completar cuadrados:

$(x^2 - 4x + \quad) + (y^2 + (5/2)y + \quad) = 40$.

En los espacios vacíos tenemos que sumar la mitad del coeficiente de x o y elevado al cuadrado, y luego lo tenemos que sumar al otro miembro de la igualdad:

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + (5/2)y + 25/16) = 44 + 25/16$.

Lo que está entre cada paréntesis ya se puede escribir como un par de binomios al cuadrado:

$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 44 + 25/16 = 729/16 = (27/4)^2$.

Esto nos muestra que la circunferencia tiene como centro al punto (2, -5/4) y su radio mide 27/4. La gráfica es pues la siguiente:

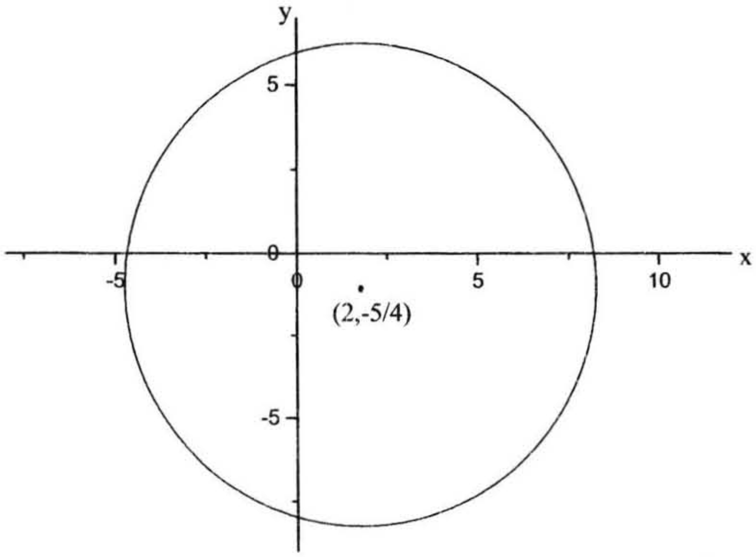


Figura 3.8.

Ejemplo:

Graficar la cónica dada por la ecuación $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 1/2 = 0$.

Solución:

Para ello necesitamos llevarla a la forma canónica, lo que haremos separando los términos en x,y en el primer miembro de la ecuación y el término independiente en el segundo miembro:

$(x^2 + 4x + \quad) - (y^2 + 3y + \quad) = 1/2$

En los espacios vacíos sumaremos los números que faltan para completar los respectivos cuadrados:

$(x^2 + 4x + 4) - (y^2 + 3y + 9/4) = 1/2 + 4 - 9/4$

agrupando:

$(x + 2)^2 - (y + 3/2) = 9/4$

dividiendo entre 9/4:

$$\frac{(x+2)^2}{(3/2)^2} - \frac{(y+3/2)^2}{(3/2)^2} = 1.$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (-2,-3/2) y con vértices en (-7/2,-3/2), (-1/2,-3/2). Los focos están en (-4.12,-3/2), (0.12,-3/2). Los extremos de los lados rectos son $(-2 \pm 3/\sqrt{2}, -3/2 \pm 3/2)$, esto es: (-4.12,0), (-4.12,-3), (0.12,0) y (0.12,-3). Las asíntotas son las rectas y = x, y = -x, esto es, la hipérbola es equilátera. Estos datos nos permiten dibujar la siguiente gráfica:

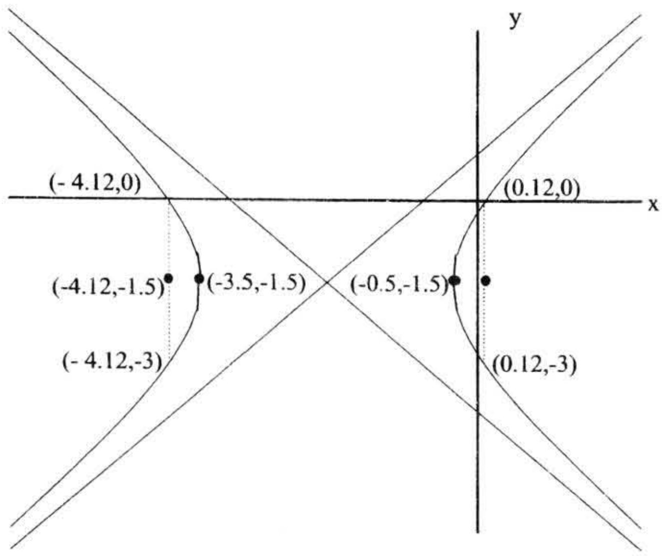


Figura 3.9.

Degeneración

Si tenemos la ecuación de una cónica, puede suceder que al tratar de llevarla a la forma canónica se encuentre alguna inconsistencia que no nos permita graficarla. Cuando esto sucede se dice que la cónica está degenerada. Enseguida se dan algunos criterios que muestran lo que sucede con la cónica en función de los valores de los coeficientes de la ecuación.

Circunferencia:

Se define $N = D^2 + E^2 - 4F$

Si $N > 0$, la circunferencia es real

Si $N = 0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $(-D/2,-E/2)$

Si $N < 0$, el radio es negativo y por tanto no hay ningún lugar geométrico (circunferencia imaginaria).

Parábola:

Si los coeficientes de x,x^2 o y,y^2 no son ambos cero, hay parábola real.

Si los coeficientes de x,x^2 son ambos cero ($C = 0$ y $E = 0$), o bien ambos coeficientes de y,y^2 son cero ($A = 0$ y $D = 0$), se resuelve la ecuación y dependiendo de las raíces se tiene:

Si las raíces son reales y diferentes, se tienen dos rectas paralelas a alguno de los ejes

Si las raíces son reales e iguales, se tiene una recta paralela a alguno de los ejes

Si no hay raíces reales, no hay ningún lugar geométrico.

Elipse:

Se define $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$

Si $N > 0$, se tiene elipse real

Si $N = 0$, sólo se tiene el punto $(-D/2A,-E/2A)$

Si $N < 0$, no hay lugar geométrico (elipse imaginaria)

Hipérbola:

Se define N igual que para la elipse:

Si $N \neq 0$, hay elipse real

Si $N = 0$, sólo hay dos rectas que se cortan.

Ejemplo:

Determinar el lugar geométrico que describe la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

Solución:

Tenemos que $A = 1$, $D = 1$, $C = 0$, $E = 0$. Luego, se trata de una parábola degenerada. Para saber qué clase de degeneración tiene, resolvemos para x con la fórmula general.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2} = 2,-3$$

Como tiene raíces reales diferentes, son dos rectas paralelas: $x = -3$, $x = 2$.

Ejemplo:

Hallar el lugar geométrico que representa la ecuación $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$.

Solución:

Pasaremos la ecuación a la forma canónica, primero agrupando para completar cuadrados:

$(x^2 - 4x + \ ) + 4(y^2 + 2y + \ ) = -10$,

sumando lo que falta en ambos miembros:

$(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = -10 + 4 + 4$

$(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = -2$

dividiendo entre -2:

$$\frac{(x-2)^2}{-2} + \frac{(y+1)^2}{-(1/2)} = 1.$$

Como no puede haber elipses cuyos semiejes al cuadrado den números negativos, concluimos que no hay lugar geométrico.

Ejercicios 3.6:

1) En los problemas siguientes hallar el centro y el radio de la circunferencia descrita por la ecuación dada. Grafíquela de ser posible o explique por qué no es posible.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$.

d) $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$.

2) Encontrar las coordenadas del foco, vértice y los extremos del lado recto de las siguientes parábolas:

a) $y^2 - 4y + 8x - 28 = 0$.

b) $x^2 + 2x + 12y + 37 = 0$.

c) $y^2 + 6y + 10x - 1 = 0$.

d) $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$.

3) En las siguientes elipses encontrar las coordenadas del centro, los focos, vértices, extremos del eje menor y del lado recto.

a) $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$.

b) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$.

c) $25(x + 1)^2 + 169(y - 2)^2 = 4225$.

d) $225(x - 2)^2 + 289(y - 3)^2 = 65.025$.

4) Encontrar para las siguientes hipérbolas las coordenadas del centro, focos y vértices, así como las ecuaciones de las asíntotas.

a) $3x^2 - 2y^2 + 4y - 26 = 0$.

b) $9x^2 - 4y^2 + 90x + 189 = 0$.

c) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$.

d) $49y^2 - 4x^2 + 98y - 48x - 291 = 0$.

En los siguientes ejercicios, dibujar la curva cuya ecuación se da con todos sus elementos que la caracterizan, o explique por qué no se puede dibujar.

5) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$.

6) $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24\,y = 135$.

7) $3x^2 - 5x + 8 = 0$.

8) $2y^2 + 8y - 5 = 0$.

9) $9x^2 + 96x + 256 = 0$.

10) $4x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 6 = 0$.

11) $x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$.

12) $x^2 + y^2 + x/2 + y/3 + 13/144 = 0$.

13) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 13 = 0$.

14) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$.

15) $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

16) $x^2 + 5y^2 + 4 = 0$.

17) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

Intersecciones de cónicas

Si una cónica se interseca con una recta, se pueden obtener los puntos de intersección (1 o 2 puntos) despejando alguna de las variables en ambas ecuaciones e igualándolas, para después sustituir el valor hallado en alguna de las ecuaciones que despejamos antes. Si una cónica se interseca con otra cónica, puede ser difícil resolver la ecuación resultante en el caso general, pero hay casos en que se puede resolver fácilmente. Esto sucede sólo si al sustituir se elimina alguna de las dos variables que están elevadas al cuadrado.

Ejemplo:

Hallar los puntos donde se intersecan la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 41 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$

Solución:

Para despejar a alguna de las incógnitas podemos restar ambas ecuaciones, lo que nos dará:

$12x + 12y - 60 = 0.$

y de aquí podemos despejar y, lo que nos da:

$y = -x + 5$

que al sustituir en la ecuación de la segunda circunferencia nos da:

$x^2 + (-x + 5)^2 + 2x - 19 = 0$

o bien:

$x^2 - 4x + 3 = 0.$

Resolviendo esta ecuación con la fórmula general se obtiene:

$x_1 = 1, x_2 = 3;$

para estos valores se obtienen los siguientes valores de y:

$y_1 = 4, y_2 = 2.$

Los puntos de intersección son: (1,4) y (3,2).

Ejercicios 3.7:

1) Hallar las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$ con la recta $2x - y + 1 = 0$.

2) Encontrar las intersecciones de la recta $x - 2y + 6 = 0$ con la parábola $x^2 - 4x - y + 3 = 0$.

3) Determinar las intersecciones de la elipse $x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 7 = 0$ con la recta $x + 2y - 2 = 0$.

4) Determinar los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ y de la parábola $y^2 = 24x$.

5) Determinar los puntos de intersección de la hipérbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ y la parábola $y^2 = 3x$.

6) Determinar los puntos de intersección de las dos parábolas: $y = x^2 - 2x + 1$, $x = y^2 - 6y + 7$.

3.2 Esfera

En el espacio una ecuación de segundo grado puede dar lugar a diversas superficies, la más sencilla de ellas es la esfera que se estudiará a continuación.

Ecuaciones de la esfera

Una esfera es una superficie que consta de todos los puntos en el espacio que equidistan de un punto llamado centro. Como en el plano, en el espacio se cumple también el teorema de Pitágoras, para cualquier punto P sobre la esfera de coordenadas (x,y,z), se cumple la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2,$$

siendo (h,k,l) las coordenadas del centro.

A veces se da la ecuación de la esfera en forma vectorial como:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{C})\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{C}) = r^2$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la esfera que pasa por (1,0,1), (-1,2,3), (-3,1,1) y cuyo centro está sobre el plano xy.

Solución:

Si el centro está en el plano xy, la ecuación es de la forma:

$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + G = 0.$

Sustituyendo cada uno de los puntos en esta ecuación nos queda el sistema:

$D + G = -2$

$-D + 2E + 3G = -14$

$-3D + E + G = -11$

resolviendo por eliminación (o determinantes) se obtiene la solución:

$D = 5/2,\ E = 1,\ G = -9/2;$

así pues, la ecuación de la esfera es:

$x^2 + y^2 + z^2 + 5x/2 + y - 9/2 = 0.$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la esfera que tiene centro en (-2,5,-1) y que pasa por el punto (3,-4,7).

Solución:

El radio de esta esfera cumple $r^2 = 5^2 + 9^2 + 8^2 = 170$, asi que la ecuación es:

$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 170$,

lo que al desarrollar nos da:

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 10y + 2z - 140 = 0$.

Plano tangente a una esfera

Un plano que es tangente a una esfera tiene un punto en común con la esfera, digamos $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Además el radio de la esfera es perpendicular al plano, por lo cual si construimos el vector radio podemos usarlo como vector normal al plano para obtener la ecuación punto normal. Así pues, la ecuación del plano tangente a la esfera con centro en $C = (h,k,l)$ en el punto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ es:

$(\mathbf{C} - \mathbf{P}_0)\cdot\mathbf{P}_0 = 0$

o bien:

$(h - x_0,k - y_0,l - z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0) = 0$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 19 = 0$.

Solución:

Primero manipularemos para encontrar el centro de esta circunferencia:

$x^2 + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = 19 + 4 + 1$

$x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 24$

Esto nos muestra que el centro está en (0,2,1). Para hallar el vector normal al plano restamos el vector que da el centro al vedtor que da el punto del plano:

$x = 4 - 0, y = 1 - 2, z = 2 + 1;$

de donde vemos que la ecuación del plano debe ser:

$4(x - 4) - (y - 1) + 3(z - 2) = 0$

o bien:

$4x - y + 3z - 21 = 0$.

Ejercicios 3.8:

1) Hallar la ecuación de la esfera en cada caso:

a) centro en (0,0,0) y radio 9

b) centro en (-5,-3,7) y radio 2

c) centro en (4,-4,-2) y pasa por el origen

d) los puntos (2,-3,5) y (4,1,-3) son los extremos de un diámetro

e) centro en el origen y el plano $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ es tangente a la esfera

f) centro en (3,-5,-2) y el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera

g) la esfera pasa por los puntos (3,1,-3),(-2,4,1),(-5,0,0) y su centro está en el plano $2x + y - z + 3 = 0$

h) la esfera pasa por los puntos (1,-2,-1),(-5,10,-1),(4,1,11),(-8,-2,2)

2) Determinar las coordenadas del centro C y el radio r de la esfera dada por cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$

b) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$

e) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$

3) Hallar la ecuación de la esfera de radio 3 que es tangente al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punto (1,1,-3).

4) Calcular el radio de la esfera que es tangente a los planos $3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55$.

5) Una esfera tiene el centro en la recta determinada por los planos $2x + 4y - z - 7 = 0$, $4x + 5y + z - 14$ y es tangente a los planos $x + 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Hallar su ecuación.

6) Hallar la ecuación de la esfera que es tangente a los dos planos paralelos $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, sabiendo que el punto de contacto con uno de ellos es (5,-1,-1).

7) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el punto $M_1 = (6,-3,-2)$.

8) Demostrar que el plano $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Calcular las coordenadas del punto de contacto.

9) Hallar los valores de a para los cuales el plano $x + y + z = a$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

10) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$ en el punto $M_1 = (-1,3,0)$.

11) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y paralelos al plano $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

12) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ y paralelos al plano $4x + 3z - 17 = 0$.

13) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ en el punto $(1,2,-2)$.

Apéndice

Respuestas a los ejercicios

Ejercicios 1.1: (Página 13)

1) $(x_1,x_2,x_3) = (1,-3,-2)$ 2) no hay solución 3) $(x_1,x_2,x_3) = (-1-7t,2+2t,t)$

4) $(x_1,x_2) = (3,-1)$ 5) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-s+2t,1+2s-2t,s,t)$

6) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (7/2-5s/2-2t,t,1/2+s/2,s)$ 7) $(x_1,x_2,x_3) = (2,1,-1)$ 8) sin solución

9) $(x_1,x_2,x_3) = (1,-3,-2)$ 10) $(x_1,x_2,x_3) = (1,-3,-2)$ 11) $(x_1,x_2,x_3) = (1,-3,-2)$

12) $(x_1,x_2,x_3) = (5,1,1)$ 13) sin solución 14) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2,1/5,0,4/5)$

15) $(x_1,x_2,x_3) = (3,-1,2)$

Ejercicios 1.2: (Página 16)

1) $(x_1,x_2,x_3) = (-8/11,-10/11,1)t$ 2) $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$

3) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-19/3,-53/11,-79/33,1)t$ 4) $(x_1,x_2,x_3) = (-3/7,-4/7,1)t$

5) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3/5,1,4/5,1)t$ 6) $(x_1,x_2,x_3) = (8,13,1)t$ 7) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,0,0)$

8) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,0,0)$ 9) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,0,0,1)t$ 10) $(x_1,x_2,x_3) = (-7/3,9/3,1)t$

Ejercicios 1.3: (Página 18)

1) $k = 6$, $(x_1,x_2) = (3,0) + (1,1)t$; $k \neq 6$ no sol. 2) sol. trivial para toda k

3) $k = 2$, $(x_1,x_2) = (1,1)t$; $k = 4$, $(x_1,x_2) = (1,-1)t$; otra k, sol. trivial

4) sol. única para toda k: $(x_1,x_2) = (\frac{2k+3}{1+k^2},\frac{3k-2}{1+k^2})$ 5) $k = -1/10$, no sol., $k \neq -1/10$, sol. única.

6) $k = 6$, no sol., $k \neq 6$, sol. única.

7) $k = -39/4$, no sol.; otra k sol. única: $(x_1,x_2,x_3) = (\frac{-2k-113}{39+4k},\frac{-10k-89}{39+4k},\frac{34}{39+4k})$

8) cualquier k da sol. única. 9) cualquier k da sol. única.

10) k = -105/13, no sol.; otra k, sol. única: $(x_1,x_2,x_3) = (\frac{-39k+385}{105+13k}, \frac{-78k+295}{105+13k}, \frac{-325}{105+13k})$

Ejercicios 1.4: (Página 25)

1) $\begin{pmatrix} -25 & -1 & 7 \\ -8 & -6 & 8 \\ 24 & -31 & -26 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 12 & -7 & 23 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -5 & 270 & 245 \\ -250 & 245 & 290 \\ 415 & 0 & -45 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 170 & 40 & 355 \\ 24 & 98 & 470 \\ -12 & 97 & 119 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -7 & 14 & -16 \\ -52 & 47 & 32 \\ 41 & 27 & -40 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} -186 & 322 & 441 \\ -440 & 336 & 362 \\ 84 & -73 & -1249 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 100 & 49 & 36 \\ 16 & 49 & 81 \\ 49 & 4 & 49 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 80 & 133 & 124 \\ -84 & 123 & 169 \\ 251 & 74 & 47 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 144 & 49 & 25 \\ 16 & 16 & 324 \\ 9 & 49 & 196 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 963 & 110 & 831 \\ 60 & 207 & 905 \\ 194 & 298 & 366 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1/30 & 2/15 \\ 7/30 & -1/15 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

13) singular 14) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$ 15) $\begin{pmatrix} 34/35 & -11/35 & -9/35 \\ -27/35 & 18/35 & 2/35 \\ 12/35 & -8/35 & 3/35 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 13/276 & -11/46 & 7/69 \\ -53/276 & 13/46 & -2/69 \\ 37/276 & -3/46 & 4/69 \end{pmatrix}$ 17) $\begin{pmatrix} -3/23 & -16/253 & 35/253 \\ 1/23 & 59/253 & -50/253 \\ 4/23 & 29/253 & -16/253 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} -15/8 & 3/8 & 5/8 \\ 29/24 & -3/8 & -7/24 \\ 3/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$ 19) singular 20) $\begin{pmatrix} 1/11 & -20/319 & 2/29 \\ 1/11 & -9/319 & -2/29 \\ 1/11 & 68/319 & -1/29 \end{pmatrix}$

Ejercicios 1.5: (Página 29)

1) (x_1,x_2,x_3) = (2,-3,-1) 2) (x_1,x_2,x_3) = (3,1,2) 3) (x_1,x_2,x_3) = (7/11,3/11,-12/11)

4) (x_1,x_2,x_3) = (-4,2,7) 5) matriz singular 6) (x_1,x_2,x_3) = (6/49,-85/49,-240/49)

7) (x_1,x_2,x_3) = (-5/3,-7/27,-89/54) 8) (x_1,x_2,x_3) = (26/41,65/164,-137/164)

9) (x_1,x_2,x_3) = (0,6,9) 10) (x_1,x_2,x_3) = (-7/24,35/16,47/48)

Ejercicios 1.6: (Página 36)

1) $(x_1,x_2,x_3) = (2,-3,-1)$ 2) $(x_1,x_2,x_3) = (3,1,2)$ 3) $(x_1,x_2,x_3) = (7/11,3/11,-12/11)$

4) $(x_1,x_2,x_3) = (-4,2,7)$ 5) infinitas soluciones 6) $(x_1,x_2,x_3) = (6/49,-85/49,-240/49)$

7) $(x_1,x_2,x_3) = (-5/3,-7/27,-89/54)$ 8) $(x_1,x_2,x_3) = (26/41,65/164,-137/164)$

9) $(x_1,x_2,x_3) = (0,6,9)$ 10) $(x_1,x_2,x_3) = (-7/24,35/16,47/48)$

Ejercicios 1.7: (Página 38)

1) $\begin{pmatrix} 1/30 & 2/15 \\ 7/30 & -1/15 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ 3) singular 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 34/35 & -11/35 & -9/35 \\ -27/35 & 18/35 & 2/35 \\ 12/35 & -8/35 & 3/35 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 13/276 & -11/46 & 7/69 \\ -53/276 & 13/46 & -2/69 \\ 37/276 & -3/46 & 4/69 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -3/23 & -16/253 & 35/253 \\ 1/23 & 59/253 & -50/253 \\ 4/23 & 29/253 & -16/253 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} -15/8 & 3/8 & 5/8 \\ 29/24 & -3/8 & -7/24 \\ 3/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$

9) singular 10) $\begin{pmatrix} 1/11 & -20/319 & 2/29 \\ 1/11 & -9/319 & -2/29 \\ 1/11 & 68/319 & -1/29 \end{pmatrix}$

Ejercicios 2.1: (página 45)

1) x = -4, y = 17 2) x = 0, y = 0, z = 0 3) x = 2a - 104, y = -4b - 24, z = 26c - 22

4) x = -2, y = 6, z = 5 5) x = 24, y = 160, z = 0 6) x = -1, y = 1, z = 1

7) a) (-2,0,4), b) (27,5,-4), c) (-1,-5,2), d) (-39,69,-12), e) (-30,-7,5), f) (0,-10,0), g) **x** = (-3/8,5/8,3/4), h) $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 3$

8) a) c1 = -t, c2 = -t, c3 = t, b) ninguno cumple 9) 2**i** - 6**j** + 3**k**, 7

10) a) 11**i** - 8**k** b) 9.64 c) 19.95 11) z = ± 3

Ejercicios 2.2: (Página 49)

1) 79º 2) a) -6, b) 9, c) 16, d) 37, e) 11, f) 13, g) 153 3) a = 3

5) 64.6°, 149°, 73.4° 6) (19/81)(4**i** – 4**j** + 7**k**). 7) 13 8) 11.4 y 7

9) 4.7 y 7 10) a) 57°, b) 90°, c) 32.3°, d) 90°, e) 11.4° 11) 0, 90°

12) a) -6, b) 9, c) 16, d) 13, e) -61, f) 37, g) 73 13) a) -62, b) 162, c) 373

14) $\alpha = 4$, $\beta = -1$ 15) $\alpha = -6$ 16) **x** = 2**i** + 3**j** - 2**k** 17) (4,-2,4)

18) (-12/13,16/13,-48/13) 19) 5 20) (-11/9,-11/9,11/18)

Ejercicios 2.3: (Página 55)

1) a) (-14,-13,11), b) (14, 13, -11), c) (22,26,-22) 2) a) (24,7,-5), b) (-5,15,15)

3) 15 4) a) 3.46, b) 5.16, c) 14.97, d) 12.17, e) (0.41,0.41,-0.82), f) 1

5) k = 0.65 6) 5.2 7) a) 57°, b) 90°, c) 37.3°, d) 90°, e) 11.4°, f) 51° 8) 51°

9) a) (-23,7,-1), b) (-20,-67,-9), c) (-78,52,-26), d) (0,-56,-392), e) (24,0,-16), f) (-12,44,-36)

10) a) 0, (20,58,22), 90° b) -24, (1,7,-2), 163° c) -34, (-14,-54,52), 116° d) 6, (-6,48,-4), 83° e) -1, (0,-1,1), 125.3° f) 0, (2,-26,3), 90° g) -32, (1,22,-5), 144.8° h) 4, (-3,8,0), 65° i) -29, (-45,-5,15), 121.3° j) -8, (34,17,-17), 100.9°

11) ± 30 12) 16 13) a) 24, b) 60 14) a) 3, b) 27, c) 300

15) a) (5,1,7), b) (10,2,14), c) (20,4,28) 16) 14 17) (-7,14,-7), (10,13,19) 18) 27

Ejercicios 2.4: (Página 62)

1) x - 2y + 32 = 0 2) 5x - 3z = 0 3) x + 2y - z + 3 = 0 4) ±(1/7)(3**i** – 2**j** + 6**k**).

5) 2x + 3y + 6z – 35 = 0.

6) a) x + 4y + 2z - 28 = 0, b) -x + 7y + 6z - 6 = 0, c) z = 0, d) 2x + 3y + 4z = 0

7) 5x - 2y + z - 30 = 0 8) 7x + 12y - 9z = 0 9) x - 2y + z + 3 = 0 10) 5x - 3z = 0

11) 4x - y - 2z - 9 = 0 12) x - y - 3z + 2 = 0 13) x + 4y + 7z + 16 = 0

14) 9x - y + 7z - 40 = 0 15) 3x + 3y + z - 8 = 0

16) a) (2,-1,-2), b) (1,5,-1), c) (3,-2,0), d) (0,5,-3), e) (1,0,0), f) (0,1,0) 17) 5x - 3y + 2z = 0

18) 2x - 3z - 27 = 0 19) 7x - y - 5z = 0 20) x + 2z - 4 = 0

Ejercicios 2.5: (Página 64)

1) a) $9x + y - 5z - 16 = 0$, b) $6y - 3z - 3 = 0$, c) $x + 9y - 5z - 16 = 0$ 2) (1,-2-2)

3) a) y h) son paralelos, e) y g) son perpendiculares

4) a) $l = 3$, $m = -4$, b) $l = 3$, $m = -2/3$, c) $l = -10/3$, $m = -6/5$ 5) a) 6, b) -19, c) -1/7

6) a) 131.8°, b) 45°, c) 90°, d) 82.3°

Ejercicios 2.6: (Página 67)

1) 2 2) 3.5 3) 6.5 4) 1 5) 0.5 6) 5/6

Ejercicios 2.7: (Página 68)

1) a) $(x,y,z) = (1,-2,1) + (2,3,-2)t$, b) $(x,y,z) = (3,-1,0) + (2,-1,3)t$, c)

2) $(x,y,z) = -(1,1,1) + (0,1,0)t$

3) a) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$, b) $x = 2t + 1$, $y = 5t - 1$, $z = -3$, c) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$

4) a) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$, b) $x = t + 3$, $y = -t + 1$, $z = t$, c) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$

5) a) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 2$, b) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$

6) a) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$, b) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$

7) a) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$, b) $x = t + 3$, $y = -t + 1$, $z = t$, c) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$

Ejercicios 2.8: (Página 72)

1) a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$, b) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$

2) a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$, b) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$, c) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$

3) a) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 2$, b) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = -19t - 2$

4) $5x - 7y - 3 = 0$, $z = 0$; $5x + 2z - 3 = 0$, $y = 0$; $7y - 2z + 3 = 0$, $x = 0$

5) $3x - y - 7z + 9 = 0$, $5y + 2z = 0$

6) a) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$, b) $x + z - 18 = 0$, c) $x + z - 3 = 0$, d) $x - y + 15 = 0$

7) a) $a \neq 7$, b) $a = 7$, $b = 3$, c) $a = 7$, $b \neq 3$

8) $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$

9) (9,-4,0), (3,0,-2), (0,2,-3)

10) $5x - 7y - 3 = 0$, $z = 0$; $5x + 2z - 3 = 0$, $y = 0$; $7y - 2z + 3 = 0$, $x = 0$

11) $3x - y - 7z + 9 = 0$, $5y + 2z = 0$

12) a) $(x,y,z) = (2,-1,0) + (1/2,7/4,1)t$, b) $(x,y,z) = (-5/13,12/13,1)t$, c) $(x,y,z) = (3,2,0) + (1,2,1)t$, d) $(x,y,z) = (17/19,14/19,0) + (-1/19,7/19,1)t$, e) $(x,y,z) = (4/5,13/5,0) + (-1/5,3/5,1)t$

Ejercicios 2.9: (Página 74)

1) 60º 2) 45º 3) -3 4) -2 5) -3, -23 6) 6, 3/2

7) $9x + 11y + 5z - 16 = 0$ 8) $13x - 14y + 11z + 51 = 0$ 9) $x - 8y - 13z + 9 = 0$

10) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+4}{9}$ 11) a) 45º, b) 16.8º, c) 52.2ºº, d) 71.7º, e) 0º

Ejercicios 2.10: (Página 76)

1) (-17,-1,1) 2) 7 3) a) 21, b) 6, c) 15 4) a) 13, b) 3, c) 7

5) 25 6) 7.2 y 6.7

Ejercicios 2.11: (Página 78)

1) a) (2,-3,6), b) es paralela, c) está contenida en el plano

2) a) (2,3,-6), b) es paralela, c) (-2,1,3) 3) (2,-1,0), (4/3,0,-1/3), (0,2,-1)

4) a) -4, b) 9, c) 3 5) $4x + 6y + 5z - 1 = 0$ 6) $6x - 20y - 11z + 1 = 0$

9) (9,-4,0), (3,0,-2), (0,2,-3) 12) $5x + 5z - 8 = 0$

13) $s(5x - 2y - z - 3) + t(x + 3y - 2z + 5) = 0$ 14) $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

15) $s(5x - y - 2z - 3) + t(3x - 2y - 5z + 2) = 0$ 16) $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+5}{-5}$

17) $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ 18) $x + 2y + 2z = 0$

Ejercicios 3.1: (Página 83)

1) $x^2 + y^2 = 16$ 2) $x^2 + y^2 = 81$ 3) $x^2 + y^2 = 12.25$ 4) $x^2 + y^2 = 30.25$

5) $x^2 + y^2 = 18$ 6) $x^2 + y^2 = 169$ 7) $x^2 + y^2 = 65$

Ejercicios 3.2: (Página 87)

1) $y^2 = 6x$ 2) $y^2 = -2x$ 3) $x^2 = y$ 4) $x^2 = -12y$ 5) $a = 3$ 6) $a = 5/4$

7) $a = 1$ 8) $a = 1/4$ 9) $y^2 = 4x$ 10) $y^2 = -9x$ 11) $x^2 = y$ 12) $x^2 = -2y$

13) $x^2 = -12y$

Ejercicios 3.3: (Página 90)

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 6) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ 7) $\frac{x^2}{25}+y^2=1$ 8) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

9) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$ 10) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ 11) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$

12) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

Ejercicios 3.4: (Página 94)

1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ 6) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$ 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 8) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$

9) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$ 10) $a = 3$, $b = 4$, $(-5,0)$, $(5,0)$, $e= 5/4$, $y = \pm 4/3\, x$ 11) $\sqrt{2}$

Ejercicios 3.5: (Página 97)

1) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$ 2) $(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$ 3) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$

4) $(x - 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 49/2$ 5) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 80$ 6) $(y + 4)^2 = -(x - 3)$

7) $(x + 1)^2 = 2(y + 2)$ 8) $7y^2 - 11y - 18x - 14 = 0$ 9) $y^2 + 2y - x - 2 = 0$

10) $9(x - 5)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$

11) $20x^2 + 36(y - 3)^2 = 720$

12) $4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 720$

13) $9x^2 + 25(y - 2)^2 = 225$

14) $16(x + 2)^2 + 4(y - 2)^2 = 64$

15) $48(x - 2)^2 - 16y^2 = 768$

16) $36y^2 - 25x^2 + 300x - 1800 = 0$

17) $55(x - 2)^2 - 9(y - 2)^2 = 495$

18) $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$

Ejercicios 3.6: (Página 103)

1) a) (4,-5), $r = \sqrt{53}$, b) (1/4,0), $r = \frac{1}{4}$, c) R:(4,7/2), $r = \frac{1}{3}\sqrt{113}$, d) (4,-5), $r = \sqrt{53}$

2) a) F(2,2), V(4,2), (2,6), (2,-2), b) F(-1,-6), V(-1,-3), (-7,-6), (5,-6), c) F(-3/2,-3), V(1,-3), (-3/2), (-3/2,-8), d) F(1,3), V(0,3), (1,1), (1,5)

3) a) C(-5,-4), F_1(-8,-4), F_2(-2,-4), V_1(-10,-4), V_2(0,-4), B_1(-5,-8), B_2(-5,0), (-5±3,-4±16/5), b) C(-1,2), $F_1(-1,2-\sqrt{12})$, $F_2(-1,2+\sqrt{12})$, V_1(-1,-2), V_2(-1,-6), B_1(-3,2), B_2(1,2), $(-1\pm 1,2\pm\sqrt{12})$, c) C(-1,2), F_1(-13,2), F_2(11,2), V_1(-14,2), V_2(12,2), B_1(-1,-3), B_2(-1,7), (2±8,3±225/17), d) C(2,3), F_1(-6,3), F_2(10,3), V_1(-15,3), V_2(19,3), B_1(2,-12), B_2(2,18), (2±8,3±225/17)

4) a) C(0,1), $V(\pm\sqrt{8},1)$, $F(\pm\sqrt{20},1)$, b) C(-5,0), V(-5±2,0), $F(-5\pm\sqrt{13},0)$, c) C(-3,1), $V(-3\pm\sqrt{2},1)$, $F(-3\pm\sqrt{3},1)$, d) C(-6,-1), V(-6,-1±2), $F(-6,-1\pm\sqrt{53})$

5) elipse horizontal con centro en (2,-1) de semiejes a = 3, $b = \sqrt{6}$.

6) hipérbola horizontal con centro en (-1,3) y semieje $\sqrt{34}$.

7) Parábola, recta imaginaria 8) dos rectas 9) una recta

10) elipse imaginaria 11) dos rectas 12) punto (2,-1/2) 13) punto (2,-1/2)

14) imaginaria 15) elipse imaginaria 16) Elipse imaginaria 17) un punto (2,-3)

Ejercicios 3.7: (Página 105)

1) (0.815,2.63), (-4.415,-7.83) 2) (0,3), (9/2,21/4) 3) (4.23,-0.11), (1.1,1.45)

4) (6,12), (6,-12) 5) $(10,\sqrt{30})$, $(10,-\sqrt{30})$

6) (2,1), (-1,4), $(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{7+\sqrt{13}}{2})$, $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2})$

Ejercicios 3.8: (Página 108)

1) a) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, b) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 4$, c) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 36$, d) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 21$, e) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, f) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$, g) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$, h) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 81$

2) a) (3,-2,5), r = 4, b) (-1,3,0), r = 3, c) (2,1,-1), r = 5, d) (0,0,3), r = 3, e) (0,-10,0), r = 10

3) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$, $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$ 4) r = 6

5) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 49$ 6) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

7) 6x - 3y - 2z - 49 = 0 8) (2,-6,3) 9) a = ±6 10) 2x - y - z + 5 = 0

11) x + 2y - 2z - 9 = 0, x + 2y - 2z + 9 = 0 12) 4x + 3z - 40 = 0, 4x + 3z + 10 = 0

13) z + 2 = 0

Bibliografía

Anton, H. "Introducción al álgebra lineal". Segunda edición. Limusa. 2002.

Efimov, N. "Curso breve de geometría analítica". Mir. 1969.

Fuller, G. "Geometría analítica". Addison Wesley Iberoamericana. 1988.

Kindle, J. H. "Geometría analítica". McGraw hill. 1970.

Kletenik, D. "Problemas de geometría analítica". Mir. 1979.

Kurosch, E. "Curso de álgebra superior". Mir. 1968.

Lehman, C. "Geometría analítica". Segunda edición. Limusa. 1980.

Lipschutz, S. "Álgebra lineal". McGraw hill. 1991.

Spiegel, M. S. "Análisis vectorial". McGraw hill. 1988.

Wooton, W. et al. "Geometría analítica moderna". Publicaciones Cultural. 1985.

Matemáticas complementarias
Se terminó de imprimir
en el mes de abril del año 2007
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo
a cargo de la
Sección de Producción
y Distribución Editoriales
Se imprimieron
100 ejemplares más sobrantes
para reposición.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COSEI COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2892891

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

MATEMATICAS COMPLEMENTARIAS

CERVANTES ORTIZ

46463 $ 15.00

$

ISBN: 970-31-0287-5

978-97031-02877

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias